

POROVNÁNÍ MATEMATICKÝCH MODELŮ PRO VÝPOČET SMRŠŤOVÁNÍ A DOTVAROVÁNÍ BETONU ■ COMPARISON OF THE MATHEMATICAL MODELS FOR PREDICTION OF CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE

Jan Soška, Lukáš Vráblík

Příspěvek se zabývá porovnáním matematických modelů pro výpočet parametrů reologického chování betonu, které jsou stanoveny v normách ČSN 73 6207, ČSN EN 1992-1-1, ČSN EN 1992-2 a dle Modelu B3. Dále jsou studovány účinky vstupních časových parametrů na výpočet charakteristik dotvarování a smršťování dle Modelu B3. ■ The paper compares the mathematical models for prediction of creep and shrinkage of concrete, which are implemented in the standards ČSN 73 6207, ČSN EN 1992-1-1, ČSN EN 1992-2 and the Model B3 on a standard simple example. Further, the paper notices some inaccuracies and mathematical disagreements in the Model B3, which are associated mainly with short curing times.

V ČR již od dubna t. r. platí nová soustava norem ČSN EN, které nahradily původní české normy. Projevy reologických vlastností betonu (dotvarování a smršťování) nebyly v původních českých normách správně zohledněny, a docházelo tak často k jinému chování reálných konstrukcí, než se předpokládalo dle výpočetní predikce (nárůst deformací, omezení použitelnosti, porušení konstrukcí). V současnosti jsou tyto jevy daleko více prozkoumány na vědecké úrovni založené na výsledcích mnoha měření a k jejich zpřesňování stále dochází. Je totiž zřejmé, že jen s odpovídající predikcí chování konstrukce můžeme zabránit nežádoucím jevům, které by mohly znamenat omezení používání konstrukcí, popřípadě vést až ke ztrátě jejich únosnosti.

Účinky smršťování a dotvarování betonových konstrukcí se nejvíce projevují zejména na velkorozponových konstrukcích, které jsou po celou dobu své životnosti zatíženy dlouhodobě působícím zatížením (především vlastní tíha konstrukce), nebo u konstrukcí, u kterých v čase se zvětšující deformace může výrazně snížit jejich provozuschopnost či použitelnost, popřípadě redukovat jejich únosnost (štíhlé konstrukční prvky, oblouky s nízkým vzepětím a skořepinové konstrukce). Problémy pak nenastávají pouze v podobě nadměrného nárůstu deformací, ale také v přerozdělení vnitřních sil u konstrukcí, které během výstavby mění statický systém (zejména letmo betonované mosty).

Dotvarování a smršťování betonu jsou velmi složité a komplikované jevy, jejichž časový vývoj, stejně jako jejich konečná hodnota, jsou závislé na množství faktorů a vstupních parametrů. Pro jejich popis je možné použít mnoho více či méně spolehlivých matematických modelů, často normově závislých, které dotvarování a smršťování popisují z hlediska jejich časového průběhu, kvantifikují jejich velikost a zohledňují vlivy vstupních parametrů. Tyto modely se zásadním způsobem liší ve své komplexnosti, neboli jak jsou schopny správně (a zda vůbec) postihnout velké množství jednotlivých vlivů na dotvarování a smršťování. Všechny modely by však měly splňovat základní předpoklady chování betonu jako materiálu. Toto je možné shrnout do několika zásad, které musí modely respektovat:

- modul pružnosti limitně narůstá se stářím betonu (stáru-tí betonu),
- čím později je betonový prvek zatížen, tím méně bude dotvarovat,

- součinitel dotvarování musí nabývat vždy kladných hodnot,
- po odtížení prvku dochází k zotavování – dlouhodobé poměrné pretvoření částečně vymizí,
- větší délka doby ošetřování betonu se projeví snížením dotvarování a smršťování,
- vyšší třída (pevnost) betonu – nižší dotvarování a smršťování,
- vyšší vodní součinitel se projeví intenzivnějším dotvarováním a smršťováním,
- v prostředí s nižší relativní vlhkostí prvky dotvarují a smršťují více,
- tenké prvky vykazují intenzivnější dotvarování a smršťování oproti masivním.

Byla provedena rozsáhlá analytická studie porovnávající některé používané matematické modely pro výpočet reologického chování betonu (ČSN 73 6207, ČSN EN 1992-1-1, ČSN EN 1992-2 a Model B3). Během porovnávání modelů byla zjištěna celá řada nesrovnalostí a více než zajímavých přístupů a výsledků u některých modelů. Jedná se především o různé odlišnosti samotné struktury modelů, kdy vliv změny určité vstupní hodnoty způsobuje jejich zásadně rozdílné chování. Vzhledem k současné situaci platnosti technických norem se přímo nabízí porovnat tyto modely:

- model použitý v normě ČSN 73 6207 [5],
- model použitý v normě ČSN EN 1992-1-1 Příloha B [6],
- model použitý v normě ČSN EN 1992-2 Příloha B [7],
- model B3 [1].

Norma ČSN 73 6207 sice již není v současné době platná pro nově započaté projekty, ale byla vybrána z důvodu názorného ukázání změny v přístupu k výpočtu reologických účinků, matematické jednoduchosti a názornosti použitých výpočetních vztahů, a zejména vzhledem k faktu, že je stále používaná pro dokončení dříve započatých projektů (před započatím platností souboru norem ČSN EN).

Protože aktuální a platné modely použité pro výpočty podle EN umožňují použít pro výpočet i jiné metody, je do porovnání přidán Model B3. V současné době se pravděpodobně jedná o nejuznávanější model, ale zároveň také o jeden z nejdiskutovanějších modelů, které pro výpočet reologických vlastností betonu existují. Model je založen na obrovském počtu experimentálních ověřování, resp. vychází z daných měření a svými matematickými postupy se snaží co nejpřesněji vystihnout chování zkoušených konstrukcí. Pro potřeby tohoto příspěvku jsou použity dvě varianty Modelu B3.

Model B3 I – jedná se o částečně upravený model dle [1], který odstraňuje problémy se záporným součinitelem dotvarování. Tyto problémy jsou spojeny s krátkými časy ošetřování betonu. Byla proto navržena úprava, konkrétně úprava vzorce pro výpočet vývoje modulu pružnosti v čase, resp. jeho velikosti v čase aplikace zatížení. Vývoj modulu pružnosti v čase t je tak stanoven dle vzorce:

$$E(t) = \frac{1}{J(t+0,01;t)}, \quad (1)$$

kde J je funkce poddajnosti pro časový interval $(t+0,01;t)$, t je sledovaný okamžik, kdy zjišťujeme velikost modulu pružnosti.

Tento vzorec pro výpočet modulu pružnosti betonu v libovolném čase nahrazuje původní vztah:

$$E(t) = E(28) \sqrt{\frac{t}{4 + 0,85 \cdot t}} \quad (2)$$

Tímto způsobem se podařilo odstranit problémy s případy, kdy vycházel záporný součinitel dotvarování, zároveň však tento výpočet způsobuje jiné komplikace, které budou diskutovány dále.

Model B3 II – s tímto označením je analyzován Model B3 dle jeho definice v [1] bez jakýchkoli dalších úprav.

V prováděných analýzách bylo dodržováno značení tak, jak je definováno pro jednotlivé modely. Dochází tak k určitým nejasnostem zejména při označování zásadních časových údajů z hlediska popisu dotvarování a smršťování. Použité značení je shrnuto v tab. 1.

VISKOELASTICKÉ CHOVÁNÍ BETONU

Beton je typickým příkladem materiálu, jehož chování z hlediska odezvy na dlouhodobé zatížení lze charakterizovat jako viskoelastické. Samotné dotvarování betonu jako nárůst deformace při konstantním napětí je typickým příkladem viskoelasticity. Při porovnání jednotlivých matematických modelů dotvarování byl právě základní model viskoelastického chování zvolen jako referenční, který vystihuje reálné termodynamické chování betonu.

Závislost mezi přetvořením (odezva na působící zatížení) a napětím v čase je na základě zvoleného reologického modelu materiálu popsána diferenciální rovnicí. Typický reologický model je soustavou pružin a tlumičů, jejichž parametry je popsáno výše uvedené chování. Pro účely prováděné analýzy byl zvolen jednoduchý reologický Kelvinův model (obr. 1), který se skládá z pružiny a sériově („za sebou“) připojeného Kelvinova článku. Vývoj deformace ϵ , resp. napětí σ při dané historii napětí, resp. deformace při použití tohoto reologického modelu jsou uvedeny na obr. 2.

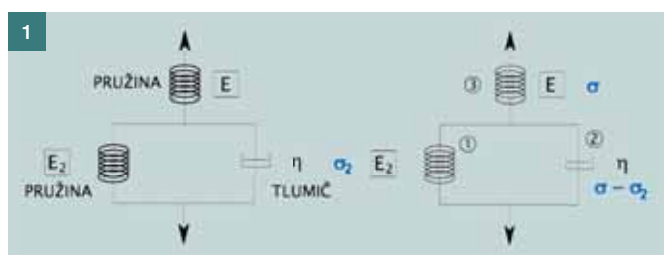
Tab. 1 Tabulka značení časových parametrů | Tab. 1 Time parameters specification

Symbol	Popis, význam
t	sledovaný okamžik, analyzovaný čas
t_0	stáří betonu při vnesení zatížení (ČSN 73 6207, ČSN EN, Kelvinův model) doba ošetřování – Model B3
t'	stáří betonu při vnesení zatížení – Model B3
t_1	stáří betonu při odtížení

Obr. 1 Kelvinův model reologického chování betonu | Fig. 1 Kelvin model of concrete rheological behaviour

Obr. 2 Časově závislé chování betonu podle Kelvinova modelu, a) vývoj deformace v čase při konstantním napětí, b) relaxace napětí při neměnné deformaci; c) vývoj napětí při konstantní změně deformace v čase | Fig. 2 Time-dependent behaviour of concrete according to Kelvin model, a) time development of deformation at constant stress, b) stress relaxation at constant deformation; c) time development of stress at constant deformation change

Obr. 3 Analyzovaná historie napětí | Fig. 3 Analyzed stress history



Při uvážení napětí σ v pružině ③ (tuhost E) a napětí σ_2 v pružině ① (tuhost E_2) Kelvinova článku (obr. 1) vychází celková deformace systému:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma_2}{E_2} \quad (3)$$

Z podmínek rovnováhy je zřejmé, že velikost napětí v tlumiči ② (parametr tlumení η) je $(\sigma - \sigma_2)$. Závislost mezi časovou změnou deformace a vývojem napětí v čase je popsána diferenciální rovnicí:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma - \sigma_2}{\eta} \quad (3)$$

Po dosažení za σ_2 z rovnice (3) do rovnice (4) dostáváme diferenciální rovnici ve tvaru:

$$\frac{d\epsilon}{dt} \frac{\eta}{E_2} + \epsilon = \frac{d\sigma}{dt} \frac{\eta}{E_2} \frac{1}{E} + \sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \right) \quad (5)$$

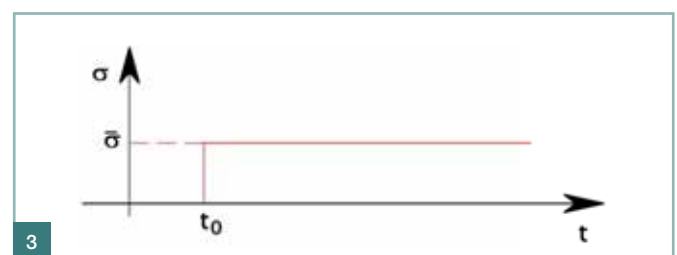
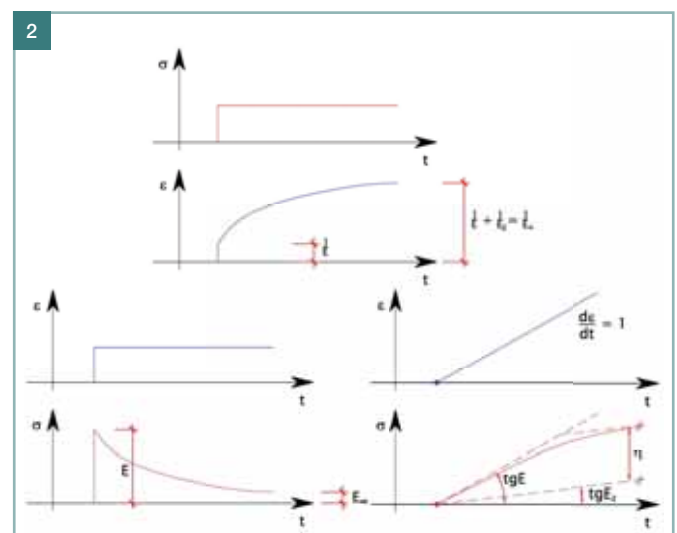
Při uvážení $\frac{\eta}{E_2} = \tau_r$ a $\frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} = \frac{1}{E_\infty}$, kde parametrem τ_r je popsáno zpoždění vývoje deformace, je finální podoba diferenciální rovnice:

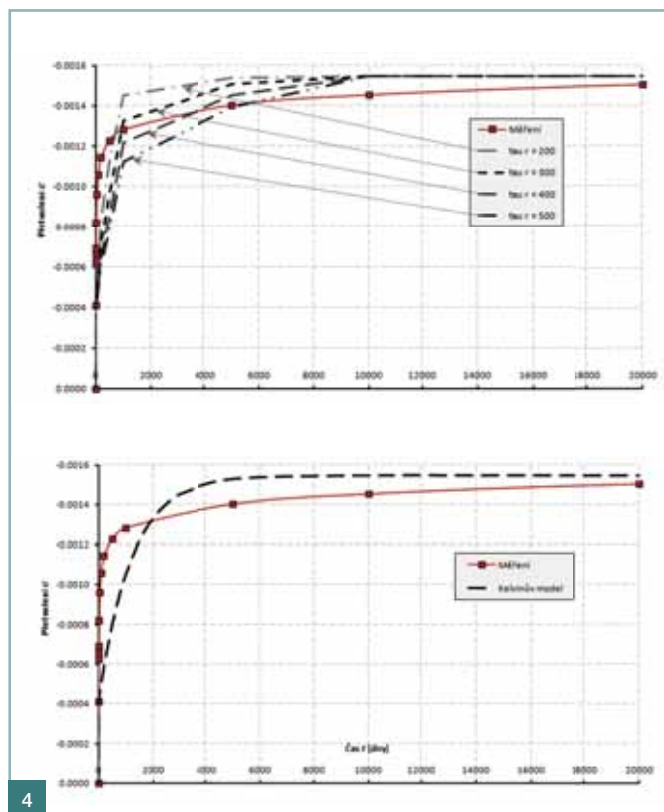
$$\frac{d\epsilon}{dt} \tau_r + \epsilon = \frac{d\sigma}{dt} \frac{\tau_r}{E} + \frac{\sigma}{E_\infty} \quad (6)$$

Pro danou historii zatěžování – konstantní napětí $\bar{\sigma}$ aplikované v čase t_0 (obr. 3) – je řešením diferenciální rovnice (6) funkce:

$$\epsilon(t) = \bar{\sigma} \left[\frac{1}{E_\infty} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_\infty} \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_r}} \right] \quad (7)$$

Funkce (7) popisuje vývoj deformace v čase jako odezvu na danou historii zatěžování. V rovnici (7), stejně jako v celém použitém reologickém modelu se vyskytují tři neznámé parametry. Parametr E má podstatu modulu pružnosti be-





4

tonu v čase aplikace zatížení t_0 a popisuje okamžitou pružnou deformaci. Parametr E_∞ má charakter efektivního modulu pružnosti, kterým lze zjednodušeně stanovit konečnou dlouhodobou deformaci. Posledním materiálovým parametrem je τ_r , kterým je popsáno zpoždění nárůstu deformace v čase. Zcela obecně mohou být tyto neznámé materiálové parametry stanoveny například na základě prováděných měření a jejich vyhodnocení.

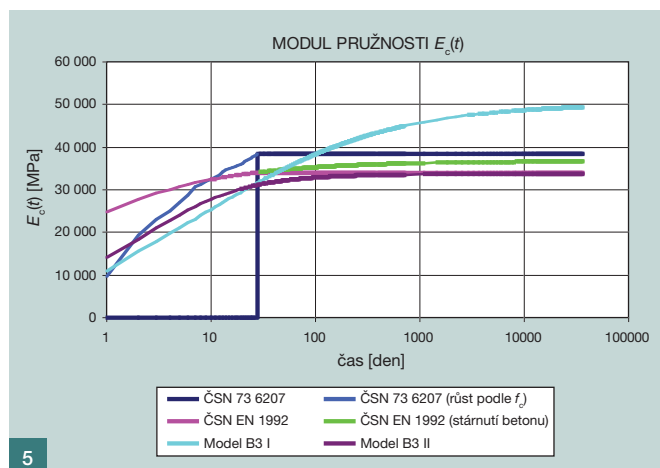
Pokud je známa hodnota pružné deformace jako okamžitá reakce materiálu na aplikované zatížení a známe konečnou hodnotu nárůstu deformace v čase, je vzhledem k matematickému vyjádření funkce postačující stanovit velikost parametru τ_r , neboť velikost E_∞ resp. E_∞ je dána právě ze známé okamžité, resp. konečné deformace. Pro nalezení hodnoty parametru τ_r při známé historii vývoje deformace je možné využít řadu matematických metod.

Reologické materiálové modely vycházející z principů viskoelasticity znamenají jednoduše použitelnou alternativu k často matematicky velmi složitým komplexním modelům. Při jejich důslednějším použití, například ve formě tzv. Kelvinova řetězce (pružina a sériově zapojené Kelvinovy články), se jejich výstižnost popisu vzhledem k výsledkům měření velice zvětšuje. Výhodou je jejich ryzí analytická forma, ze které lze usuzovat o zkoumaných projevech reologického chování betonu.

V prováděném porovnání jednotlivých matematických modelů dotvarování byl tento analytický model použit zejména s ohledem na vytvoření úsudku o vývoji a průběhu jednotlivých veličin. Tento model vychází z matematických formulací postavených na základních fyzikálních materiálových vlastnostech a vystihuje tak reálné reologické chování betonu, zejména dotvarování.

VÝPOČETNÍ ANALÝZA – VZOROVÝ PŘÍKLAD

Pro snadné porovnání jednotlivých výpočetních modelů pro výpočet smršťování a dotvarování a následně i pro porovnání vlivů jednotlivých vstupů byl zvolen vzorový příklad: centricky



5

Obr. 4 Porovnání měření a výsledků z Kelvinova modelu ■

Fig. 4 Comparison of measurements and results of the Kelvin model

Obr. 5 Porovnání vývoje modulu pružnosti betonu v čase ■

Fig. 5 Comparison of modulus of elasticity time development

Obr. 6 Porovnání průběhu součinitele dotvarování ϕ v čase; čas

vnesení zatížení $t_0 = 28$ dní ■ Fig. 6 Comparison of creep coefficient ϕ time development; loading time $t_0 = 28$ days

Obr. 7 Porovnání průběhu funkce poměrného přetvoření od smršťování v čase ■ Fig. 7 Comparison of shrinkage time development functions

tlačený sloup z betonu C35/45 obdélníkového průřezu s délkou stran 0,8 a 1,2 m. Na prvek působí normálová tlaková síla o velikosti 3 500 kN. Zatížení je na prvek aplikováno v čase sedmi dní, doba ošetřování je uvažována tři dny, vlhkost okolního prostředí 70 %, třída cementu N, bez vlivu teploty.

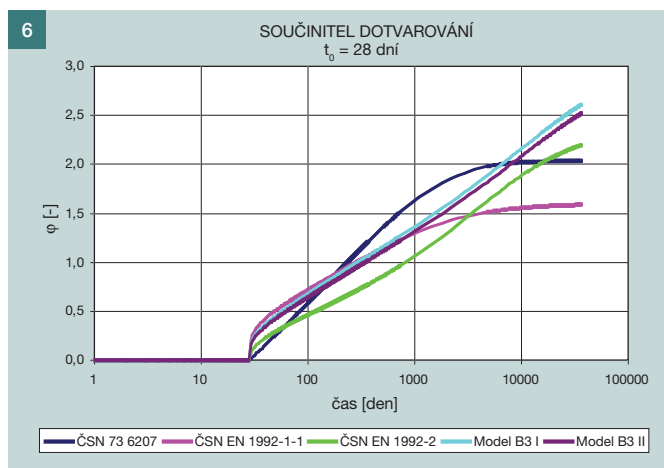
POROVNÁNÍ MATEMATICKÝCH MODELŮ

Předem je nutné upozornit na skutečnost, že cílem prováděných analýz nebylo porovnávat absolutní hodnoty sledovaných veličin. To (vzhledem k zásadní odlišnosti v přístupu jednotlivých modelů k jejich výpočtu) není prakticky ani možné a relevantní. Zejména se to projevuje pro hodnoty reologických parametrů vypočtené podle obou modelů ČSN EN a Modelu B3. Významnou roli zde totiž hraje složení betonové směsi, které může způsobit velké rozdíly ve výsledcích. Je tedy vhodné a zásadní zaměřit se především na vývoj a průběhy funkcí popisujících jednotlivé parametry zejména s ohledem na rychlost nárůstu těchto veličin v čase.

Modul pružnosti betonu $E_c(t)$

Z grafu (obr. 5) je patrné, že křivky dle obou modelů ČSN EN mají stejný průběh, zobrazena je tak pouze jedna z nich. Protože původní ČSN neobsahuje vývoj modulu pružnosti v čase do 28 dní, byl použit vývoj pro pevnost betonu a aplikován na vývoj modulu pružnosti. Dvě varianty průběhu jsou zobrazeny i pro ČSN EN. Jedna uvažuje se stárnutím betonu i po 28 dnech, druhá pouze v čase do 28 dní. Absolutní hodnotu modulu pružnosti podle ČSN 73 6207 a podle ČSN EN nelze mezi sebou porovnávat, protože ČSN udává střední hodnotu, zatímco EN tzv. hodnotu zaručenou.

Zajímavý je také rozdíl mezi ČSN EN a původním neupraveným Modelem B3 v absolutní velikosti v čase do 28 dní, kdy neupravený Model B3 udává výrazně nižší hodnoty. Na grafu Modelu B3I (upravený Model B3) je patrný problém, který je způsoben výše popsanou upravenou metodikou výpočtu. Tato úprava sice odstranila problém se zápor-



nými hodnotami součinitele dotvarování, ale zároveň způsobila jiné nesrovnalosti z hlediska popisu chování betonového prvku. Nárůst modulu pružnosti vůbec neodpovídá hodnotám, které se u betonu běžně vyskytují. Rozdíl mezi neupraveným a upraveným Modelem B3 se na předpokládaném konci životnosti betonového prvku (100 let) pohybuje kolem cca 40 %.

Součinitel dotvarování φ

Na grafu porovnání velikosti součinitele dotvarování (obr. 6) je patrné, že rozdíl mezi hodnotou ve 100 letech u obou modelů B3 je již mnohem menší (oproti rozdílu u modulu pružnosti). Největší rozdíl mezi přístupem v minulosti (ČSN) a v současné době je patrný v časech kolem 10 000 dní (cca 30 let). Je však zajímavé, že ČSN EN 1992-1-1 dává výrazně nižší hodnotu než ČSN a zároveň mají obě křivky velice podobný tvar.

Odlíšný přístup k výpočtu je viditelný v průběhu křivek podle ČSN EN 1992-2 a Modelů B3, kde křivky zobrazují, že i v čase po 30 letech stále dochází ke zvětšování součinitele dotvarování mnohem více než podle ČSN EN 1992-1-1 nebo ČSN. Dokazují tak, že původní česká norma skutečně podhodnocuje dotvarování „starých“ betonů a obecně celý vývoj dotvarování.

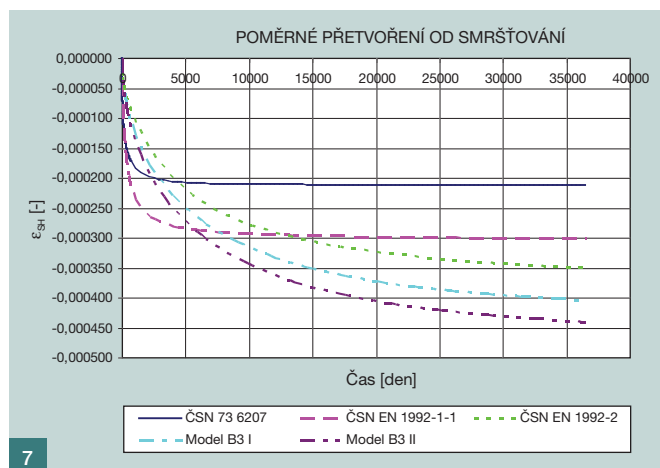
Poměrné přetvoření od smršťování ε_{SH}

V případě poměrného přetvoření od smršťování (obr. 7) se opět potvrzuje výrazné podcenění jeho velikosti dle dříve platné a používané normy ČSN 73 6207. Stejně tak se potvrzuje, že model použitý v EN 1992-1-1 je svým průběhem velice podobný modelu ČSN (tvar křivky) a že ostatní modely používají odlišný přístup, který se projevuje jak v nižší rychlosti nárůstu poměrného přetvoření od smršťování, tak zejména v mnohem vyšších hodnotách na konci životnosti konstrukce.

Analýza prvku při dané historii zatížení – modelování odtížení

Jednou z možností, jak poukázat na zásadní rozdíly mezi jednotlivými matematickými modely, je analýza chování (vývoje deformací) betonového prvku při odtížení v konkrétním čase. Na grafu na obr. 8 je zobrazeno chování betonu (poměrné přetvoření od zatížení) podle jednotlivých modelů. Vstupní časové údaje byly v analýze uváženy následující – stáří betonového prvku při zatížení $t_0 = 7$ dní, při následném odtížení $t_1 = 100$ dní. Uváženo je tlakové namáhání betonového prvku, sledován je tak vývoj stlačení prvku v čase (bez uvážení smršťování).

Při použití modelu dotvarování dle normy ČSN 73 6207 zů-



stává po odtížení deformace (přetvoření) konstantní, což je typickým projevem použité teorie stárnutí pro popis dotvarování. Vzhledem k jednoduchosti matematického modelu je toto velice jasně doložitelné. Vývoj deformace v čase t po odtížení je popsán výrazem:

$$\varepsilon(t) = -\frac{\sigma}{E(t_0)} (1 + \varphi(t; t_0)) + \frac{\sigma}{E(t_1)} (1 + \varphi(t; t_1)). \quad (8)$$

Po dosažení základních vztahů pro výpočet součinitele dotvarování dle metodiky ČSN 73 6207 do rovnice (8) a její úpravě dostáváme vztah popisující opět vývoj deformace po odtížení, tentokrát ale konstantní v čase, nezávislý na proměnné t :

$$\varepsilon = -\frac{\sigma}{E_c} \varphi_u \left[\sqrt{1 - e^{-\sqrt{t_1}}} - \sqrt{1 - e^{-\sqrt{t_0}}} \right], \quad (9)$$

kde se zároveň předpokládá $E(t_0) = E(t_1) = E_c$.

Na křivce popisující vývoj deformace po odtížení dle modelu ČSN EN 1992-1-1 je již patrný rozdíl mezi okamžitými deformacemi v čase vnesení zatížení t_0 (stlačení prvku) a v čase odtížení t_1 (fiktivní protažení) díky odlišné hodnotě modulu pružnosti v daných časech (vliv stárnutí betonu).

Ani tento model však stále neodpovídá předpokládanému průběhu, který by respektoval základní principy viskoelasticty a „zotavování“ betonu podpořené experimentálními výsledky. Poměrné přetvoření s narůstajícím časem po odtížení mírně roste. V časech ihned po odtížení sice dochází na určitou dobu k poklesu křivky poměrného přetvoření (dočasné zotavování), avšak následně dojde opět k nárůstu. V tomto ohledu tedy tento model nevystihuje správně chování betonu jako materiálu a jeho fyzikální vlastnosti. Vývoj deformace v čase je možné popsat jednoduše upravenou rovnicí (8) ve tvaru:

$$\varepsilon(t) = -\sigma \left(\frac{1}{E(t_0)} - \frac{1}{E(t_1)} \right) - \frac{\sigma}{E(t_0)} \varphi(t; t_0) + \frac{\sigma}{E(t_1)} \varphi(t; t_1). \quad (10)$$

V rovnici (10) je vývoj deformace možné rozčlenit do jednotlivých částí dle následujícího schématu. Z hlediska vývoje deformace po odtížení je pro další analýzy zásadní část „účinek dotvarování“.

V případě modelu dle ČSN EN 1992-1-1 je účinek dotvarování (s použitím parametrů obsažených v tomto modelu) popsán výrazem (11):

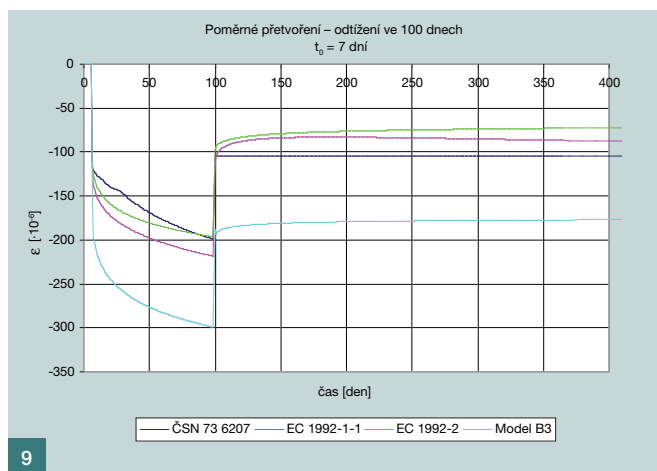
8

$$\varepsilon(t) = \underbrace{\sigma \left(\frac{1}{E(t_0)} - \frac{1}{E(t_1)} \right)}_{\text{PRUŽNÁ DEFORMACE}} + \underbrace{\left(\frac{\sigma}{E(t_0)} \cdot \varphi(t; t_0) + \frac{\sigma}{E(t_1)} \cdot \varphi(t; t_1) \right)}_{\text{ÚČINEK DOTVAROVÁNÍ}}$$

NÁRŮST DEFORMACE REDUKCE DEFORMACE „ZOTAVENÍ“

Obr. 8 Schéma jednotlivých složek deformace prvku po odtižení
 Fig. 8 Scheme of deformation components of element after unloading

Obr. 9 Vývoj poměrného přetvoření ε při odtižení v čase 100 dní
 Fig. 9 Strain ε time development for unloading time of 100 days



$$\varepsilon(t)_{\text{creep}} = -\sigma \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \cdot \left[\frac{1}{E(t_0) (0,1+t_0^{0,2})} \left[\frac{t-t_0}{\beta_H + t-t_0} \right]^{0,3} - \frac{1}{E(t_1) (0,1+t_1^{0,2})} \left[\frac{t-t_1}{\beta_H + t-t_1} \right]^{0,3} \right] \quad (11)$$

Lze ukázat, že tento výraz jako funkce proměnné t má pro určitou hodnotu této proměnné nulovou první derivaci, neboli má v tomto bodě svůj extrém. Tomuto odpovídá průběh grafu (obr. 9), kde je funkce popisující vývoj deformace po odtižení dle ČSN EN 1992-1-1 nejprve klesající (dochází k „zotavování“ betonu) a následně rostoucí. Takovéto chování je zcela v rozporu s předpoklady.

V případě modelu použitého v ČSN EN 1992-2 je situace jiná – průběh deformace po odtižení odpovídá chování pozorovanému na měřených prvcích při experimentech, které je v souladu se základními fyzikálními předpoklady materiálového chování betonu. Po odtižení dochází k relativně rychlému poklesu poměrného přetvoření, křivka se pak limitně přibližuje k určité hodnotě. Důležité je, že charakter křivky popisující vývoj poměrného přetvoření od dotvarování je stále klesající.

Toto chování je možné jednoduše popsat např. tak, že k poměrnému přetvoření od dotvarování dochází i po odtižení konstrukce, avšak směr přetvoření je opačný (způsobený virtuálním opačným zatížením aplikovaným v čase odtižení). Klesající tendence křivky je způsobena větší rychlostí nárůstu součinitele dotvarování od zatížení definujícího odtižení (zatížení opačného znaménka aplikované na zatíženou konstrukci), než jakou má v čase odtižení křivka, která popisuje vývoj součinitele dotvarování pro původní zatížení. Křivka popisující vývoj deformace po odtižení však ze samotné podstaty viskoelastického chování nikdy nemůže dosáhnout nuly (deformace nevymizí), vždy zůstává určitá část deformace jako zpožděná, dlouhodobá.

V případě sledování chování prvku při odtižení podle Modelu B3 je situace velice podobná. Na první pohled je patrný výrazný rozdíl mezi velikostí okamžitých deformací, který je způsoben nižší hodnotou modulu pružnosti v čase vnese ní zatížení. Křivka poměrného přetvoření opět limitně klesá.

Při analýze odtižení prvku dle základních referenčních principů viskoelasticity s použitím Kelvinova modelu je vývoj přetvoření po čase odtižení t_1 popsán výrazem (v souladu s rovnicí (7)):

$$\varepsilon(t) = -\sigma \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_\infty} \right) \left[e^{-\frac{t_0-t}{\tau_r}} - e^{-\frac{t_1-t}{\tau_r}} \right] \quad (12)$$

Z charakteru funkce je patrné, že se jedná o funkci klesající pro rostoucí proměnnou – čas t . Výraz je odvozen za zjednodušeného předpokladu, že modul pružnosti betonu E_0 je stejný v čase aplikace zatížení t_0 a v čase odtižení t_1 .

ANALÝZA VLIVU ZMĚNY VSTUPNÍCH HODNOT

V další části analýzy byla provedena porovnání vlivu změn jednotlivých vstupních hodnot ovlivňujících velikost a vývoj dotvarování a smršťování. V této části již nebyl analyzován model dle ČSN 73 6207 a upravený Model B3 I.

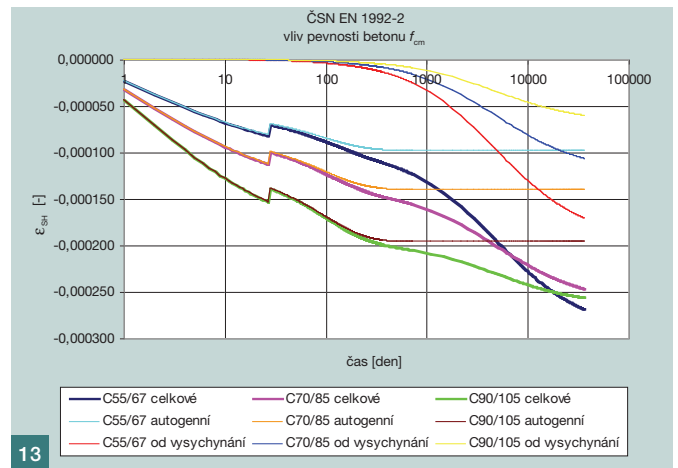
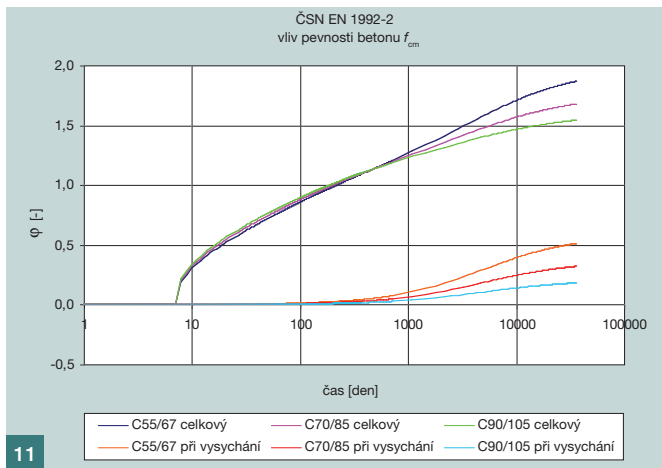
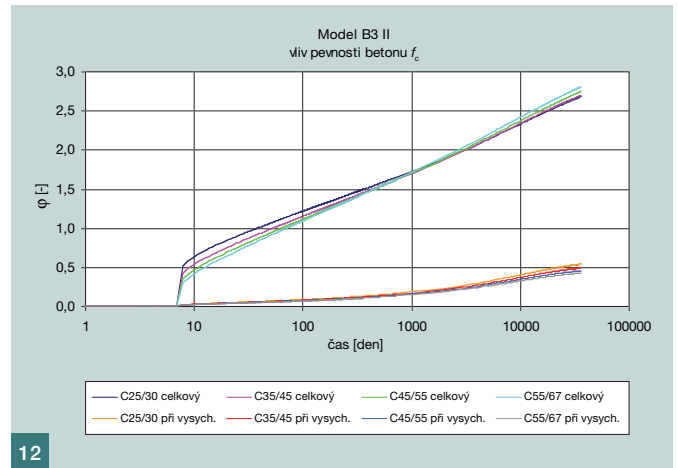
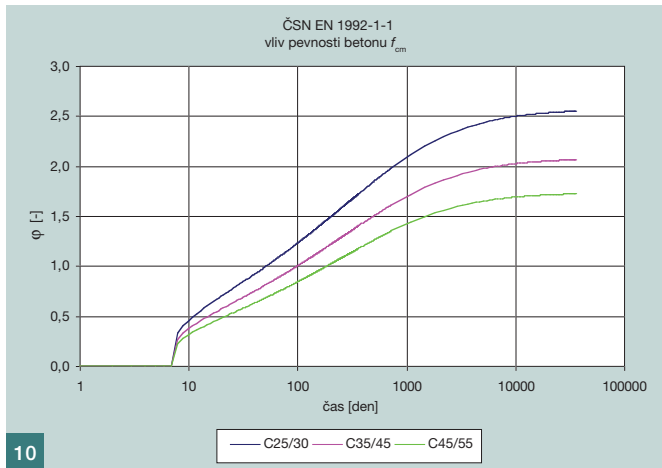
Pevnost betonu

Jako vstup byly do tohoto porovnání použity různé třídy betonů podle toho, pro které třídy je daný model definován. V případě ČSN EN 1992-1-1 je patrný přístup, že čím vyšší třída betonu je použita, tím menší je výsledný součinitel dotvarování a to po celou sledovanou dobu (obr. 10). Zajímavý je především rozdíl mezi jednotlivými třídami, který je v porovnání s ČSN EN 1992-2 podstatně větší, i když rozsah použitých vstupů nedosahuje takových hodnot.

Podle ČSN EN 1992-2 nižší třídy betonu také více dotvarují (na konci životnosti ve 100 letech), což je způsobeno rychlejším nárůstem součinitele dotvarování při vysychání (obr. 11). Avšak v časech cca do 500 dnů je tomu naopak – vyšší třídy betonů tedy mají v nižších časech rychlejší nárůst dotvarování vlivem základního dotvarování.

Model B3 II nabízí zcela odlišný přístup a to, že v časech cca do 1 000 dní nejvíce dotvarují nižší třídy betonů, v čase 100 let je situace přesně opačná (obr. 12). Je zajímavé, že se v případě této vstupní hodnoty modely takto rozcházejí.

Na grafu je zobrazena nejen celková hodnota součinitele dotvarování, ale také jeho část od vysychání, která byla dopočítána jako rozdíl mezi hodnotou celkovou a základní složkou dotvarování. Protože Model B3 neumožňuje striktně oddělit základní složku dotvarování a složku dotvarování od vysychání, muselo dojít k následující úpravě. Základní složka dotvarování byla vypočítána z upraveného vztahu pro výpočet funkce poddajnosti J – ze vztahu byl vypuštěn člen „funkce dotvarování vysycháním $C_d(t, t'; t_0)$ “ a vzorec pro výpočet funkce poddajnosti pouze od základního dotvarování má tedy tvar $J(t, t') =$



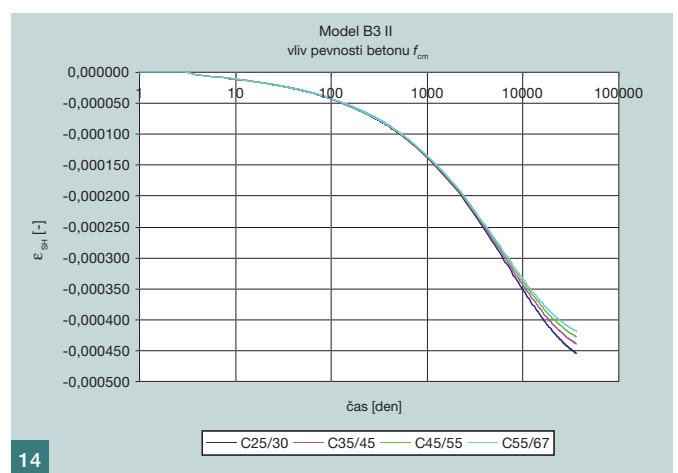
Obr. 10 Vliv změny pevnosti betonu na velikost součinitele dotvarování ϕ ; ČSN EN 1992-1-1 | Fig. 10 Influence of concrete strength on the creep coefficient ϕ ; ČSN EN 1992-1-1

Obr. 11 Vliv změny pevnosti betonu na velikost součinitele dotvarování ϕ ; ČSN EN 1992-2 | Fig. 11 Influence of concrete strength on the creep coefficient ϕ ; ČSN EN 1992-2

Obr. 12 Vliv změny pevnosti betonu na velikost součinitele dotvarování ϕ ; Model B3 II | Fig. 12 Influence of concrete strength on the creep coefficient ϕ ; Model B3 II

Obr. 13 Vliv změny pevnosti betonu na poměrné přetvoření od smršťování ϵ_{SH} ; ČSN EN 1992-2 | Fig. 13 Influence of concrete strength on the shrinkage ϵ_{SH} ; ČSN EN 1992-2

Obr. 14 Vliv změny pevnosti betonu na poměrné přetvoření od smršťování ϵ_{SH} ; Model B3 II | Fig. 14 Influence of concrete strength on the shrinkage ϵ_{SH} ; Model B3 II



$q_1 + C_0(t, t')$, kde q_1 je materiálový parametr závislý na modulu pružnosti betonu ve 28 dnech a $C_0(t, t')$ je základní funkce dotvarování. Výsledné absolutní hodnoty si jsou velice podobné.

Ze zobrazených grafů je patrné, že část, ve které se tyto dva modely liší, je tedy základní dotvarování. Samotný přístup k dotvarování při vysychání je stejný (betony s nižší pevností více dotvarují), ale zajímavý je rozdíl v absolutních hodnotách, kdy rozdíly mezi jednotlivými třídami betonu u Modelu B3 jsou minimální oproti ČSN EN 1992-2.

Zajímavé je porovnání těchto dvou modelů také z pohledu poměrného přetvoření od smršťování (obr. 13). Odlišný tvar křivky pro třídu C55/67 je pravděpodobně způsoben také součinitelem zohledňujícím pevnost betonu $K(f_{ck})$. Ten je totiž definován konstantou pro třídu C55/67 (a nižší třídy) a od-

lišným vztahem pro vyšší třídy betonů. Na grafu jsou zobrazeny kromě výsledné hodnoty celkového smršťování i její jednotlivé složky, tedy autogenní smršťování a smršťování od vysychání. Opět (jako u součinitele dotvarování) je patrné, že v nižších časech se projevuje jen autogenní složka, naopak ve vyšších časech se ke slovu dostává smršťování od vysychání a autogenní složka je již konstantní (její vliv na přírůstek poměrné deformace je tedy nulový).

Vyhodnocení podle Modelu B3 II je zcela odlišné (obr. 14). Všechny použité třídy betonů smršťují cca do 1 000 dní téměř stejně a od tohoto času je patrné větší smršťování betonů nižších tříd. Výsledné hodnoty jsou si však v absolutní hodnotě velice podobné a rozdíly jsou tedy minimální. Ale v porovnání s modelem ČSN EN 1992-2 jsou rozdíly absolutních hodnot velice velké.

Druh cementu

Vliv druhu cementu nelze dobře porovnat mezi ČS EN a Modelem B3 II, protože oba modely používají odlišné rozdělení cementů s různými vlastnostmi. Proto je uvedeno pouze porovnání norem ČSN EN. Rozdíly mezi oběma modely jsou překvapivé – zatímco ČSN EN 1992-1-1 nabízí téměř dvojnásobný rozdíl mezi třídou S a R (obr. 15), v modelu ČSN EN 1992-2 mají třídy cementu pouze minimální vliv, navíc jen v čase do 28 dní.

VLIV STÁŘÍ BETONU V OKAMŽIKU VNESENÍ ZATÍŽENÍ – MODEL B3 II

Předpokládané chování je, že čím později je betonový prvek zatížen, tím méně bude dotvarovat (což se projeví nižším součinitelem dotvarování) a to především z důvodu, že u starších (vyzrálějších) betonů je výrazně nižší procento objemu nezatvrdlé cementové pasty, která svým přesunem z prostoru mezi zrny kameniva způsobuje nárůst deformace prvku – dotvarování. Na grafu (obr. 16) je zobrazena hodnota součinitele dotvarování v čase 100 let (na ose x je zobrazen čas vnesení zatížení). Podle definice Modelu B3 je doba ošetřování označena t_0 .

Na začátku zobrazené křivky (mezi 3 a 10 dny) je patrný rozpor s výše uvedenými předpoklady a to, že čím později je prvek zatížen, tím více dotvaruje. Tato nesrovnalost úzce souvisí s dobou ošetřování. V tomto případě je doba ošetřování tři dny. Pokud však délku ošetřování zvýšíme na osm dní, chyba se již neprojevuje (obr. 17).

Uvedené grafy analyzovaly velikost součinitele dotvarování v čase 100 let v závislosti na čase vnesení zatížení. Pro každou hodnotu analyzovaného času lze najít „kritickou“ hodnotu délky ošetřování t_0 , od které se chyba již neprojevuje (např. pro sledovaný čas 100 let $t_0 = 8$ dní, pro sledovaný čas 100 dní $t_0 = 2$ dny).

Význam tohoto fenoménu je možné vhodně popsat na příkladu letmé betonáže, kdy dochází k postupnému přitěžování dříve vybetonovaných lamel. Tento postup se dá přirovnat k postupně a rychle přitěžované konstrukci velmi nízkého stáří betonu, která by pak musela dotvarovat od nového zatížení stále víc a až od určité doby by se velikost dotvarování od nového zatížení snižovala. Neplatilo by tedy, že čím je konstrukce starší v době vnesení zatížení, tím méně dotvaruje.

A čím je chyba způsobena? Součinitel dotvarování $\varphi(t, t')$ je dle Modelu B3 počítán ze vztahu:

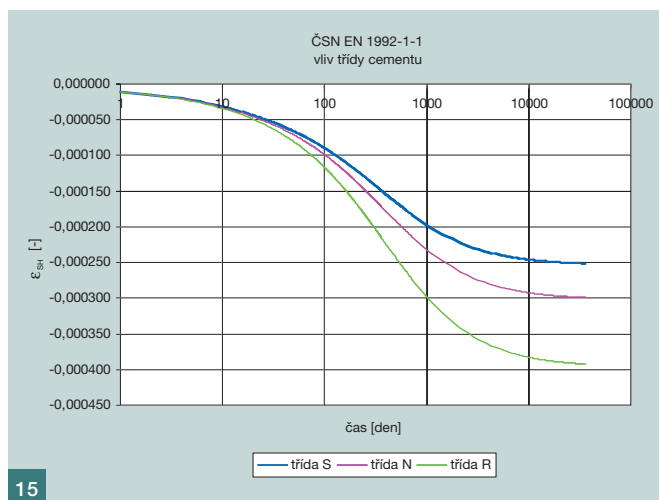
$$\varphi(t, t') = E(t')J(t, t') - 1, \quad (13)$$

kde $E(t')$ je modul pružnosti betonu v čase aplikace zatížení t' a $J(t, t')$ je funkce poddajnosti mezi časy t' a t .

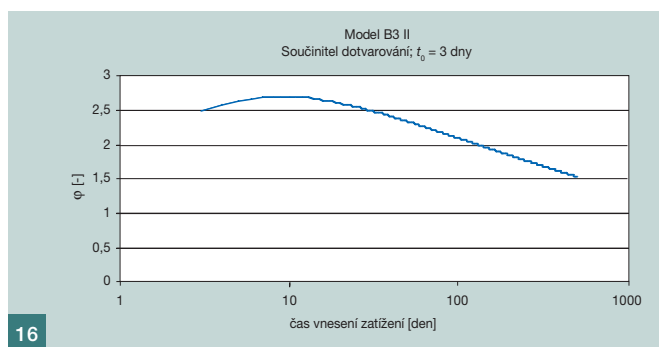
Pokud provedeme derivaci funkce $\varphi(t, t')$, neboli součinu EJ , podle času, pak problém převedeme na součet dvou součinů následovně: $(EJ)' = EJ' + EJ''$ (kde operátor „'“ značí derivaci funkce E , resp. J podle času). Obě funkce jsou zobrazené na grafu na obr. 18.

Zde je jasné patrné, že v čase do osmi dní první funkce dosahuje vyšších hodnot a klesá mnohem rychleji než druhá, což má při jejich sčítání za následek rostoucí tvar výsledné křivky průběhu součinitele dotvarování (obr. 16). V časech od osmi dnů dále už má první funkce nižší hodnoty a výsledná křivka součinitele dotvarování pak postupně klesá.

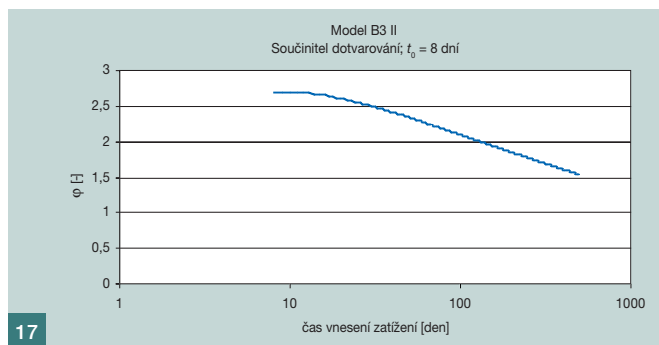
Pro úplnost je ještě uveden graf součtu obou funkcí, tedy graf derivace křivky součinitele dotvarování podle času (obr. 19). V místě, kde je derivace větší než 0, je výsled-



15



16



17

ná křivka součinitele dotvarování rostoucí (obr. 16), v časech od devíti dnů jsou hodnoty menší než 0 a křivka součinitele dotvarování je proto klesající.

ZÁVĚR

Při porovnání jednotlivých modelů se většinou potvrzuje fakt, že stará norma ČSN reologické chování betonu podceňovala. ČSN EN 1992-1-1 je v tomto ohledu sice přesnější, avšak je zde velká podobnost výsledků s původní normou ČSN. Naopak výsledky podle ČSN EN 1992-2 se často přibližují k hodnotám stanoveným dle Modelu B3 – i když absolutní hodnoty zůstávají stále nižší, průběh zobrazených křivek je většinou tvarově shodný. Je tedy otázkou, jak se konstrukce opravdu chová a které výsledky tak více odpovídají realitě, protože oba modely vznikly na základě mnoha experimentů a měření.

Z porovnání vlivů změn jednotlivých vstupních hodnot je především patrné, že modelu použitému v ČSN EN 1992-1-1 citelně chybí část „dotvarování při vysychání“ a část „smršťování od vysychání“ a dává nepřesné (podhodnocené) hodnoty této složky poměrného přetvoření od smršťování. Patrně lepší model použitý v ČSN EN 1992-2 se mnohem více přibližuje chování podle Modelu B3 II i skutečnému chování be-

Obr. 15 Vliv změny druhu cementu na ϵ_{SH} ; ČSN EN 1992-1-1 ■

Fig. 15 Influence of cement type on the shrinkage ϵ_{SH} ; ČSN EN 1992-1-1

Obr. 16 Velikost součinitele dotvarování ϕ (ve 100 letech) v závislosti

na čase vnesení zatížení; doba ošetřování $t_0 = 3$ dny; Model B3 II ■
Fig. 16 Creep coefficient ϕ (in 100 years) time development depending on the loading time; curing time $t_0 = 3$ days; Model B3 II

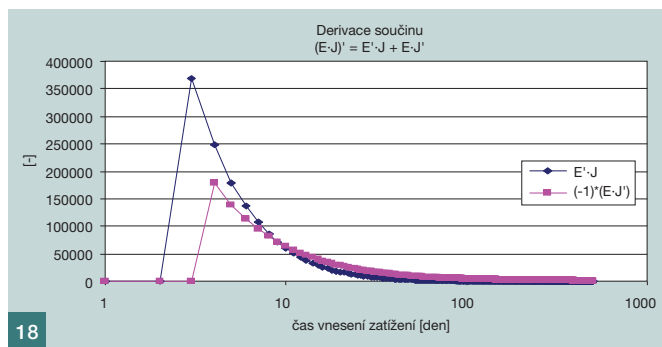
Obr. 17 Velikost součinitele dotvarování ϕ (ve 100 letech) v závislosti

na čase vnesení zatížení; doba ošetřování $t_0 = 8$ dní; Model B3 II ■
Fig. 17 Creep coefficient ϕ (in 100 years) time development depending on the loading time; curing time $t_0 = 8$ days; Model B3 II

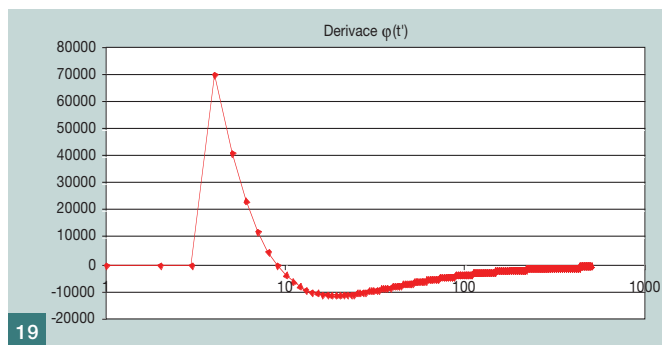
Obr. 18 Rozdělení derivace součinu $(EJ)'$ na součet dvou součinů podle pravidla per partes ■ Fig. 18 Derivation of the product $(EJ)'$ like sum of the two products under rule per partes

Obr. 19 Průběh derivace funkce $\phi(t')$ popisující velikost součinitele

dotvarování v závislosti na čase aplikace zatížení t' ■
Fig. 19 Derivation of function $\phi(t')$ depending on the loading time t'



18



19

tonu. To vše samozřejmě pouze za předpokladu, že modely EN 1992-2 a Model B3 vystihují reálné chování konstrukcí nejvíce.

Pro porovnávané modely obecně platí, že některé vstupní hodnoty mají oproti očekávání zanedbatelný vliv na absolutní hodnotu analyzovaných veličin. U **dotvarování** jsou to např. doba ošetřování, rozměry průřezu, vodní součinitel, způsob ošetřování, typ tvaru průřezu a u **smršťování** např. doba ošetřování.

Naopak jiné vstupní hodnoty dokáží změnit výsledky někdy až o stovky procent. U **dotvarování** jsou to např. relativní vlhkost, obsah křemičitého úletu, poměr kameniva ku cementu a u **smršťování** např. relativní vlhkost, vodní součinitel, poměr kameniva ku cementu a způsob ošetřování.

Existují však také veličiny, u kterých má každý model úplně odlišný přístup. Platí to zejména pro vliv pevnosti (resp. třídy) betonu nebo druhu cementu. Je také škoda, že model B3 neumožňuje do výpočtu zahrnout vliv přísad a příměsí jako např. křemičitý úlet respektovaný v ČSN EN 1992-2, protože tyto složky mají na výsledné chování betonu velice významný vliv a dají se s nimi relativně jednoduše příznivě ovlivnit jeho vlastnosti.

Literatura:

- [1] Bažant Z. P., Baweja S.: Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3, ACI Special Publication Creep and Shrinkage of Concrete, A. Al-Manaseer, Editor, 2000
- [2] Vráblík L.: Manuál k programu C&S, Praha 2006
- [3] Teplý B., Rovnaník P.: Účinky dotvarování a smršťování v singularních oblastech betonových prvků – Stochastická analýza modelu B3 – Popis variant a příklady analýz
- [4] ČSN EN 197-1 – Cement – Část 1: Složení, specifikace a kritéria shody cementů pro obecné použití 06/2001, vč. Změny Z1 09/2003, Změny A1 10/2004, Změny A3 01/2008
- [5] ČSN 73 6207 – Navrhování mostních konstrukcí z předpjatého betonu 10/1993, vč. Změny Z1 01/1998, Změny Z2 01/2006
- [6] ČSN EN 1992-1-1 – Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby 11/2006, vč. Opravy 1 07/2009, Změny Z1 03/2010
- [7] ČSN EN 1992-2 – Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 2: Betonové mosty – Navrhování a konstrukční zásady 05/2007, vč. Opravy 1 10/2009, Změny Z1 03/2010

Je více než zajímavé, že i když všechny modely jsou založeny na experimentálních měřeních a pokusech, i přesto vykazují velké odlišnosti, rozdílné přístupy a někdy až překvapivé závěry. V případě Modelu B3 II se pak setkáváme s chováním, které nutí uživatele pochybovat o věrohodnosti výsledků, které poskytuje. Ne vždy tyto výsledky odpovídají představám o chování konstrukce z betonu. Existuje zde zjevný problém s krátkými časy ošetřování betonu.

Nemělo by se také zapomínat na fakt, že vstupní hodnoty použité pro výpočet parametrů smršťování a dotvarování jsou ve skutečnosti náhodné proměnné. V současné době existují účinné nástroje (výpočetní software), které jsou schopny počítat účinky smršťování a dotvarování s využitím stochastické analýzy [3]. Hodnoty parametrů reologického chování betonu stanovené s uvážením náhodnosti vstupních dat pomocí tohoto programu vykazují u součinitele dotvarování rozptyl cca 20 % a u smršťování dokonce cca 34 %.

Z výše uvedeného vyplývá, že by projektant měl během realizace stavby vyžadovat měření vlastností betonu v čase a podle jejich skutečných velikostí aktualizovat výpočet a případně včas zasáhnout, kdyby nepředvídané, a tedy nevhodné chování betonu mohlo způsobit různé problémy nebo dokonce ovlivnit mezní únosnost konstrukce.

Pro jednoduché a rychlé použití všech uvedených matematických modelů byl vytvořen výpočetní program, který je volně k dispozici na internetových stránkách pracoviště autorů.

Uvedené výsledky byly získány v rámci řešení grantového projektu č. 104/11/1301 uděleného GA ČR, projektů č. TA 01031920 a č. TA 01030733 podporovaných TA ČR a v rámci řešení projektu SGS10/1380HK1/2T/11.

Ing. Jan Soška
e-mail: jan.soska@fsv.cvut.cz



Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D.
e-mail: lukas.vrablik@fsv.cvut.cz



oba: Katedra betonových a zděných konstrukcí
Fakulta stavební ČVUT v Praze
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
tel.: 224 354 627