

ČASOVÝ VÝVOJ NAMÁHÁNÍ V PŮDORYSNĚ ZAKŘIVENÝCH MOSTECH MĚNÍCÍCH V PRŮBĚHU VÝSTAVBY STATICKÝ SYSTÉM

TIME DEVELOPMENT OF INTERNAL FORCE DISTRIBUTION OF HORIZONTALLY CURVED PRESTRESSED CONCRETE BRIDGES WITH CHANGES OF STRUCTURAL SYSTEM DURING ERECTION

VLADIMÍR KRÍSTEK,
LUKÁŠ VRABLÍK

Statické řešení půdorysně zakřivených mostů z předpjatého betonu se změnami statického systému; odvození analytických vzorců pro snadné použití v návrhové praxi.

Structural analysis of horizontally curved prestressed concrete bridges with changes of structural system; development of analytical formulas as a tool for application in design practice.

Moderními technologiemi, kdy konstrukce během výstavby mění statický systém a kdy je obvykle navíc reologicky nehomogenní (typickým představitelem je výstavba letmo, obr. 1), jsou stavěny nejen mosty přímé, ale v řadě případů i mosty půdorysně zakřivené (obr. 2). Zatímco pro statické řešení vývoje namáhání a průhybů přímých mostů má projektant k dispozici několik ověřených a rutinně používaných programových nástrojů (z novějších např. TDA, DOMO, ze starších např. TM18), a je dokonce možné respektovat i 3D působení [7], je s podivem, že pro obdobné výpočty mostů v půdorysném zakřivení chybí nejen takovéto programy, ale i základní teoretické rozvahy a analýzy, a zejména zhodnocení závažnosti změn

statického systému v průběhu výstavby.

Jde o jeden stupeň vyšší úroveň redistribuce vnitřních sil v konstrukci, neboť probíhá nejen v rámci ohybových účinků jako u přímých mostů, ale do interakce vstupují i účinky kroutící. Míru těchto jevů využitím výpočtů přímých konstrukcí spolehlivě ohodnotit samozřejmě nelze. Projektanti v takovýchto případech mostů v půdorysném zakřivení ve většině případů tápou a problém řeší zvýšeným vyztužením, většinou značně konzervativním. Takové odhady však mají často charakter nespolehlivé extrapolace (protože u přímých mostů od trvale působících zatížení kroutící momenty nevznikají).

Záměrem tohoto pojednání je diskuse problematiky statického působení zakřivených mostů se změnami statického systému a zejména odvození analytických vzorců pro snadné použití v návrhové praxi.

V zájmu získání výsledků nezáviselých na proměnnosti průřezu (což by znamenalo zavést do popisu konstrukce další sady parametrů) a pro co nejsnazší uplatnitelnost odvozených výsledků, jsou v této studii sledovány půdorysně zakřivené mosty konstantního průřezu. To je oprávněno i tím, že půdorysně zakřivené mosty mají obvykle mnohem kratší rozpětí než mosty přímé a běžně bývají právě konstantního průřezu.

Pro řešení vlivu změny statického systému na vývoj vnitřních sil a deformací lze použít – jako jednu z možných – metodu relaxační [1]. Metoda je velmi jednoduchá, je libovolně přesná (konverguje k přesnému řešení) a je použitelná vždy, je-li

k dispozici metoda řešení dané konstrukce jako lineárně pružné. Předností je i to, že umožňuje názorné vysvětlení vývoje sil v konstrukci měnící statický systém.

Pro zhodnocení významu přeskočení vnitřních sil v půdorysně zakřivených nosnicích po změně statického systému je nejprve sledováno typické – nejjednodušší – uspořádání: most konstantního průřezu o velkém počtu polí je stavěn letmým postupem jako konzoly od jednotlivých pilířů a ve stáří betonu t , dojde ke změně statického systému na spojitý nosník, popř. rám. Ve snaze získat analytické řešení vyjádřené formou vzorce je v této kvalitativní úvaze předpokládáno stejné stáří betonu obou spojovaných částí konstrukce. Most nese rovnoměrné zatížení o intenzitě q (např. vlastní tíhu).

Řešení je provedeno na vybraném (středním) mostním poli, vetknutém v koncových průřezech, což odpovídá plně zatíženému mostu o větším počtu polí. Pro namáhání kroucením tyto podmínky uložení konců odpovídají realitě ještě lépe, neboť podporové kroutící momenty jsou podstatnou měrou zachycovány přímo reakcemi v jednotlivých podporách, takže se do sousedních polí přenášejí minimálně.

Geometrie úlohy je zřejmá z obr. 3: poloměr zakřivení střednice mostního nosníku je R , poloha sledovaného průřezu je urč-

Obr. 1 Letmá betonáž trámových předpjatých mostů – Pont sur La Mentue

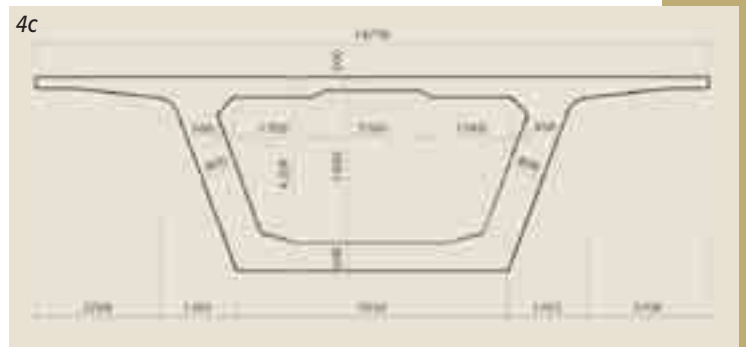
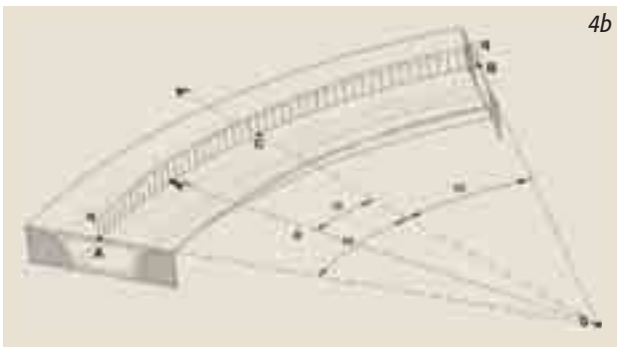
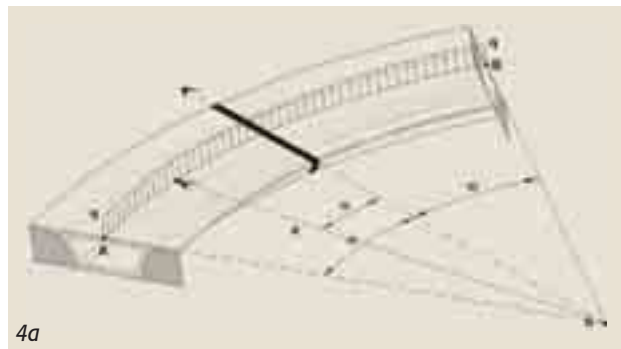
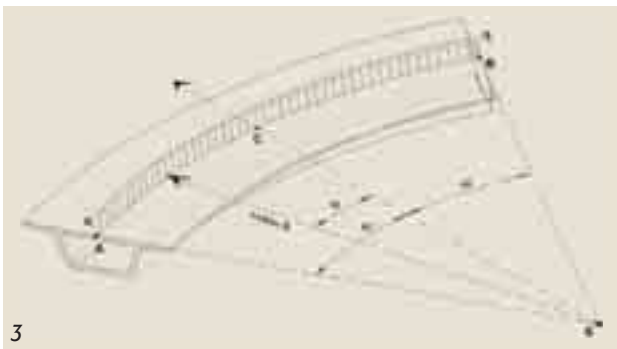
Fig. 1 Cantilever construction of frame prestressed bridges – Pont sur La Mentue



Obr. 2 Realizovaný letmo betonovaný most v půdorysném oblouku

Fig. 2 Real horizontally curved concrete bridge erected applying the cantilever construction method





na úhlem α (s počátkem ve středu rozpětí) a délkou rozpětí vymezují úhly ω .

Použití relaxační metody umožní vyjádřit časový vývoj v takovémto půdorysně zakřiveném nosníku měnícím v průběhu výstavby statický systém vzorci pro:

- ohybový moment v průřezu α ve stáří betonu t

$$M_o(\alpha, t) = \{ [1 - r(t)] [(\mu + 1) \cos \alpha] + r(t) \cos \alpha - 1 \} q R^2 \quad (1)$$

- krouticí moment v průřezu α ve stáří betonu t

$$M_k(\alpha, t) = \{ [1 - r(t)] [(\mu + 1) \sin \alpha] + r(t) \sin \alpha - \alpha \} q R^2 \quad (2),$$

(úhly nutno zadat v obloukové míře)

Součinitel relaxace $r(t)$ je stanoven podle:

$$r(t) = 1 - \frac{\varphi(t, t_0) - \varphi(t_r, t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \varphi[t, t_r]} \quad (3)$$

kde t_0 je stáří betonu při zatížení, t_r je stáří betonu při změně statického systému a t je čas, v němž výsledky hledáme.

Parametr μ , charakterizující staticky neurčitý ohybový moment v místě spojení konzol (bod C, obr. 3), se stanoví podle vzorce (4).

Ve vzorci

$$K = EJ/GJ_k \quad (5)$$

vyjadřuje poměr tuhostí průřezu v ohybu a v kroucení.

Limitním přechodem pro neomezeně rostoucí poloměr křivosti nosníku R a zmenšující se úhel ω , při platnosti relací

$$2R\omega = L, R\alpha = x \quad (6)$$

bychom dostali případ **přímého vetknutého nosníku** o rozpětí L nesoucího zatížení q . Vzniká zde pouze moment ohybový, jehož průběh a časový vývoj (jako funkce polohy průřezu x , s počátkem ve středu rozpětí, a stáří při zmonolitnění t_r udává vztah (7), a je tedy možno porovnávat výsledky vztahů (1) a (7) zhodnotit závažnost přeskupení namáhání vyvolaných ohybem na nosníku přímém a zakřiveném.

Pro parametrickou studii byl vybrán půdorysně zakřivený most komorového průřezu (průřez je jednokomorový s rozměry podle obr. 4c) s délkou typického pole 80 m, s poloměrem půdorysného

$$\mu = \frac{4(1+K) \left(\sin \omega - \frac{1}{2} \omega \right) - (1-K) \sin 2\omega - 4K\omega \cos \omega}{2(1+K)\omega + (1-K) \sin 2\omega} \quad (4)$$

$$M_{o,p} = (x, t) = \frac{1}{24} \{ [1 - r(t)] L^2 - 12x^2 \} q \quad (7)$$

$$\beta = \frac{M_o(\alpha, t)}{M_{o,p}(x, t)} = \frac{24 \{ [1 - r(t)] [(\mu + 1) \cos \alpha] + r(t) \cos \alpha - 1 \} R^2}{\{ [1 - r(t)] L^2 - 12x^2 \}} \quad (8)$$

Obr. 3 Geometrické schéma řešení úlohy
Fig. 3 Alignment of the problem solved

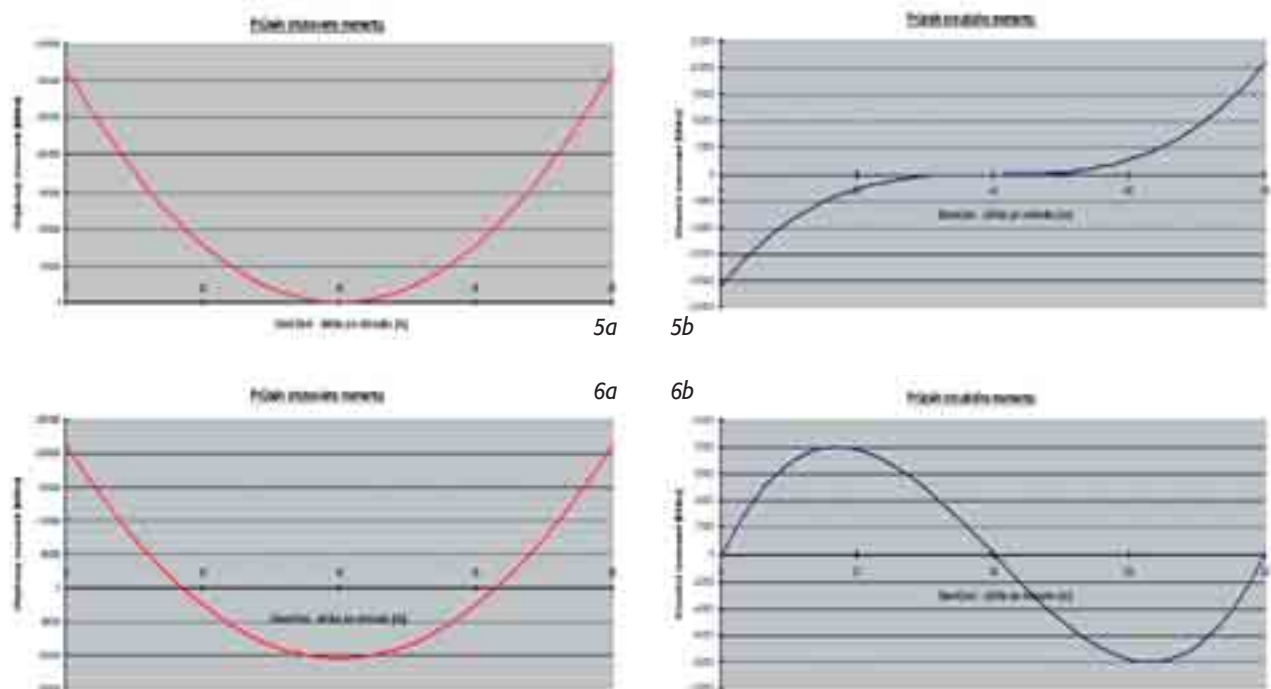
Obr. 4 Schémata postupu výstavby mostu,
a) konzolový stav, b) konečný stav,
c) příčný řez

Fig. 4 Scheme of construction sequence:
a) cantilever stage, b) final stage,
c) cross section

zakřivení 200 m a s odpovídajícím středovým úhlem $\psi = 2\omega = 23^\circ$.

Je předpokládán most o větším počtu polí, stavěný letmo od pilířů, nejprve jako konzoly (obr. 4a), jejichž konce jsou v čase t_r spojeny, a tak je vytvořen konečný statický systém (obr. 4b). Konstrukce je zatížena rovnoměrným zatížením q jednotkové intenzity působícím svíse v ose symetrie průřezů.

V rámci parametrické studie je sledován vliv několika faktorů.



Obr. 5 Průběh ohybového a kroutícího momentu v konzolovém stavu

Fig. 5 Bending and torsional moment diagrams in the cantilever stage

Obr. 6 Průběh ohybového a kroutícího momentu na oboustranně vetknutém nosníku

Fig. 6 Bending and torsional moment diagrams in the clamped beam

VLIV STÁŘÍ BETONU V ČASE ZMĚNY STATICKÉHO SYSTÉMU

Prvním sledovaným faktorem bude vliv stáří betonu v čase změny statického systému (času, kdy dojde ke zmonolitnění), tj. stáří betonu t_r .

Nejprve vymezíme z reologického hlediska dva extrémní případy:

- materiál nevykazuje dotvarování – v tomto případě průběh ohybových i kroutících momentů zůstává i po zmonolitnění trvale stejný jako v konzolovém stavu (obr. 5),

- konstrukce byla vybudována na skruži v definitivním statickém systému – v tomto případě průběh ohybových i kroutících momentů trvale odpovídá stavu na oboustranně vetknutém půdorysně zakřiveném nosníku (obr. 6).

Za pozornost stojí, že celkové vzepětí obrazců ohybových momentů nemá pro obě uspořádání zcela stejnou hodnotu. Pro případ výstavby v definitivním statickém systému na skruži má tento součet hodnotu 317 MNm, pro případ konstrukce z reologicky neaktivního materiálu, kdy po spojení konzol k přesunům namáhání nedochází, je uvedený součet 314,9 MNm. Dále připomínáme, že hodnota podporového kroutícího momentu v obr. 6b je malá (nikoliv však nulová). To, že jde o malé číslo, plyne z konkrétní geometrie řešeného uspořádání.

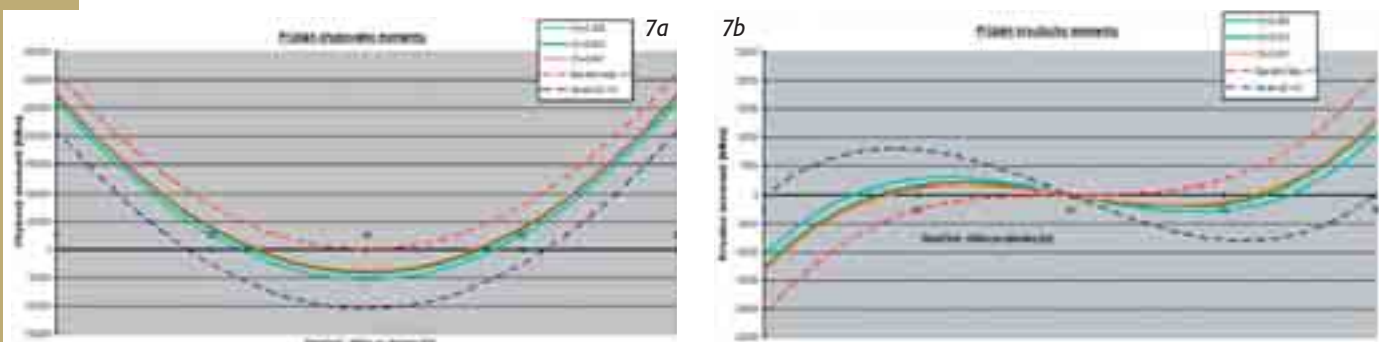
Nyní sledujeme vliv stáří betonu v čase změny statického systému (např. času, kdy dojde ke zmonolitnění), tj. stáří beto-

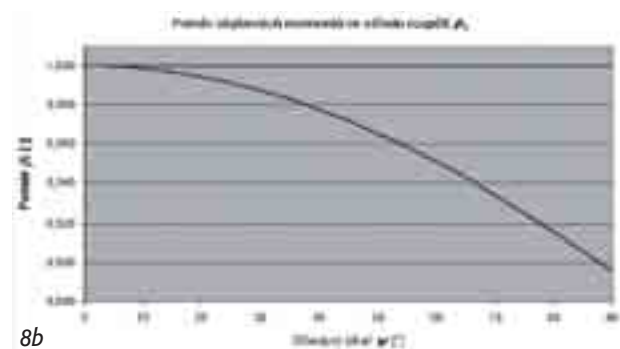
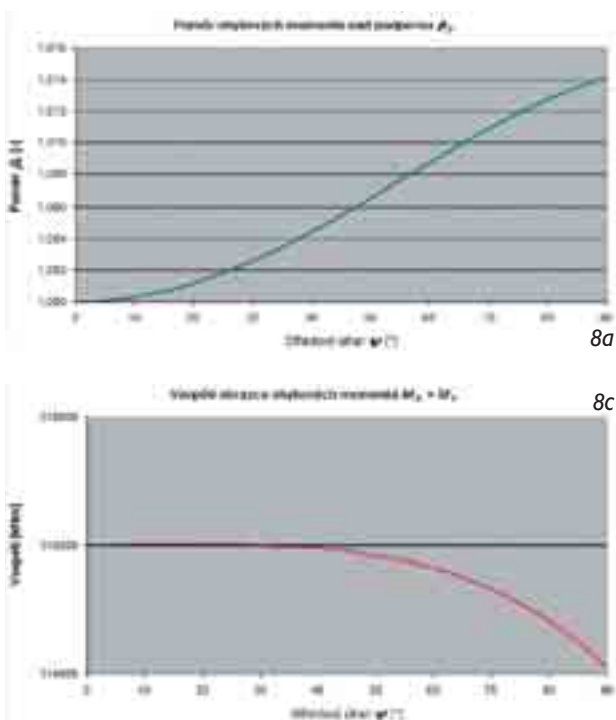
nu t_r . Na základě odvozených vztahů (1), (2) a (3) dostaneme výsledky (rozložení ohybových a kroutících momentů v čase 10 000 d) ukázané pro široký rozsah stáří betonu v okamžiku spojení konzol $t_r = 100, 500$ a 1000 d na obr. 7.

U půdorysně zakřiveného mostu dochází k redistribuci vnitřních sil nejen v rámci jedné veličiny (jako je tomu u ohybových momentů v případě přímých mostů, kde jde pouze o přemístění základních čar momentových obrázků a kde kroucení nevzniká), ale i mezi nimi. Je zřejmé, že časový vývoj vnitřních sil je složitý a velmi významný (změny v případě kroutících momentů dosahují stovek procent

Obr. 7 Rozložení ohybových a kroutících momentů v závislosti na čase spojení t_r

Fig. 7 Bending and torsional moment diagrams corresponding to time t_r when bridge was made continuous





Obr. 8 Vliv zakřivení mostu na rozložení ohybových momentů
Fig. 8 Effect of bridge curvature upon distribution of bending moments

momentu zakřiveného mostu oproti přímému nepatrná, při středovém úhlu cca $\psi = 65^\circ$, což při dané délce pole mostu 80 m odpovídá poloměru křivosti $R = 70$ m, je podporový ohybový moment o cca 1 % podceněn. Podobně, 5% přecenění v hodnotě ohybového momentu uprostřed rozpětí odpovídá středovému úhlu cca $\psi = 60^\circ$ a poloměr křivosti $R = 75$ m. Z toho vyplývá, že mezipodorové ohybové momenty jsou na zakřivení mostu citlivější než podporové,

- součet podporového ohybového momentu M_p a ohybového momentu v průřezu uprostřed rozpětí M_s („vzepětí“ momentového obrazce $M_p + M_s$), vykreslený na obr. 8c jako funkce středového úhlu ψ , vykazuje patrnou redukci

– obr. 7) a není možno jej extrapolovat z výsledků výpočtů konstrukcí přímých. Odvozené vztahy by dokonce mohly umožnit aktivní řízení velikosti namáhání (zejména krouticích účinků) volbou optimálního času zmonolitnění t_r .

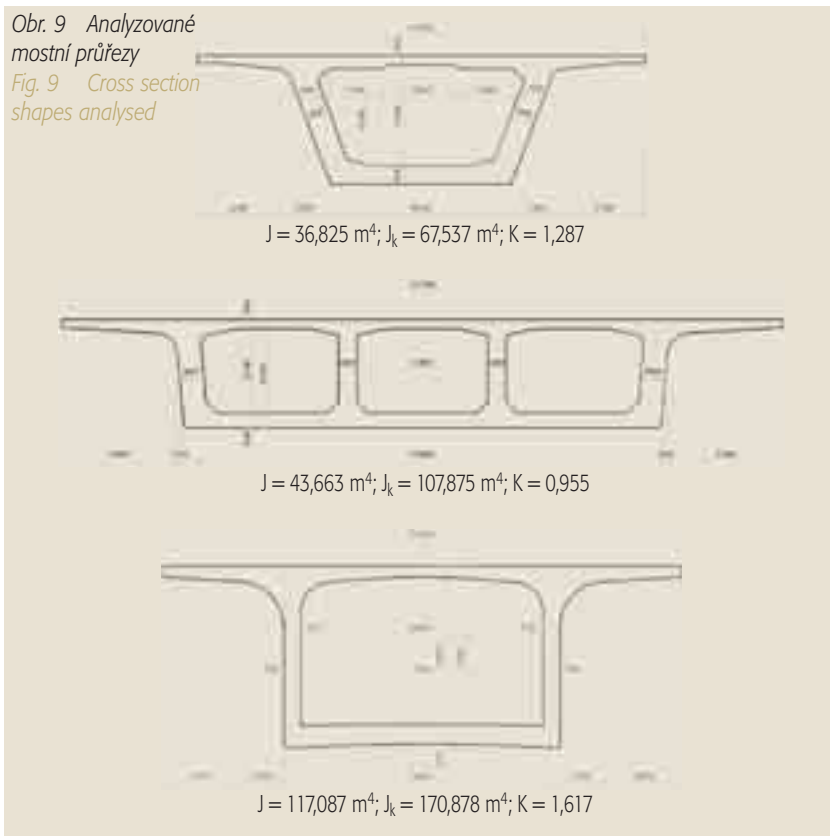
MÍRA ZAKŘIVENÍ MOSTU VE VZTAHU K VELIKOSTI A ČASOVÉMU VÝVOJI OHYBOVÝCH MOMENTŮ

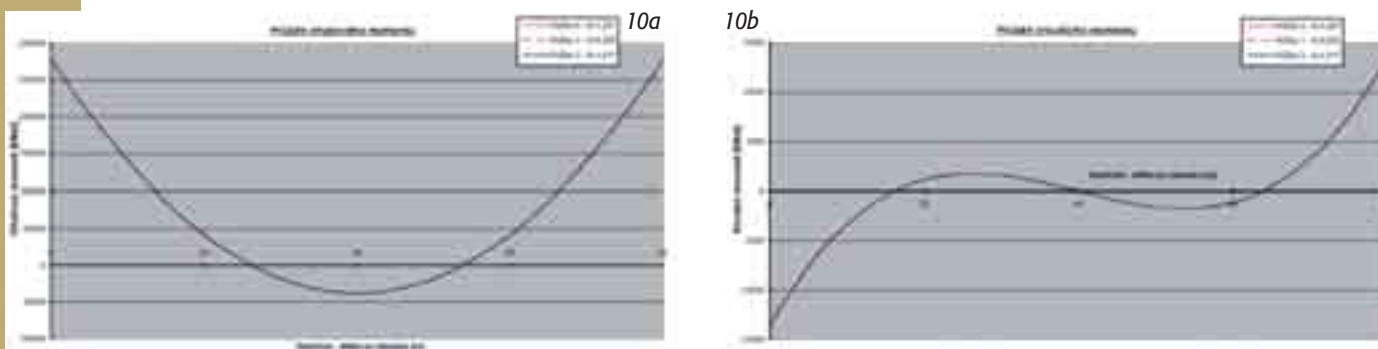
Z hlediska praktického projektování má zásadní význam otázka, jak se projeví míra zakřivení mostu na velikosti a časovém vývoji ohybových momentů, konkrétně do jakého zakřivení (charakterizovaného např. středovým úhlem $\psi = 2\omega$) je přípustné použít ohybové momenty $M_{o,p}$ zjištěné na přímé konstrukci i pro zakřivený most.

Toto lze charakterizovat poměrem β ve vztahu (8), který je na základě další parametrické studie pro geometrické uspořádání podle obr. 4 pro stáří betonu při zmonolitnění $t_r = 100$ d, znázorněn na obr. 8a pro hodnoty podporových ohybových momentů (β_s) a na obr. 8b pro hodnoty ohybových momentů v průřezu uprostřed rozpětí (β_s), v obou případech v čase 10 000 d. Je třeba opět připomenout, že u zakřiveného mostu součet podporového momentu M_p a momentu v průřezu uprostřed rozpětí M_s („vzepětí“ momentového obrazce $M_p + M_s$) nezůstává přesně konstantní (jak je tomu u přímých nosníků), ale mění se s křivostí mostu, resp. se středovým úhlem (obr. 8c).

Z těchto výsledků vyplývá:

- podporové ohybové momenty při rostoucím středovém úhlu ψ (tj. u více zakřiveného mostu) vzrůstají a ohybové momenty uprostřed rozpětí klesají,
- pro sledované uspořádání je změna v hodnotě podporového ohybového





Obr. 10 Vliv tuhosti průřezu na redistribuci ohybových a kroučících momentů
Fig. 10 Effect of cross sectional stiffness upon redistribution of bending and torsional moments

ci až od hodnoty $\psi = 30^\circ$, významnější však až od hodnoty středového úhlu $\psi = 45^\circ$,

- na velikost kroučících momentů v zakřiveném nosníku na základě výsledků řešení **přímého mostu** samozřejmě usuzovat nelze.

POMĚR TUHOSTÍ V OHYBU A V KROUČENÍ

Dalším parametrem, který rozhoduje o redistribuci namáhání, je poměr tuhostí v ohybu a v kroucení $K = EI/GJ_k$ (vztah (5)), závislejší zejména na tvaru příčného řezu mostu – průřez může být vysoký, nebo naopak široký, jedno- i vícekomorový, příp. i otevřený (což při vysokých kroučících účincích však není staticky nejvhodnější řešení). Proto jsou dále (obr. 10) – jako další část předkládané parametrické studie – uvedeny výsledky výpočtu příkladu podle obr. 4, avšak s průřezí vykreslenými v obr. 9, jimž přísluší tuhostní poměr K v rozmezí cca od 75 do 125 % své základní hodnoty. Výsledky jsou pro čas 10 000 d při stáří při zmonolitnění $t_r = 1\ 000$ d.

Z této studie (obr. 10) plyne, že – pro velmi široký rozsah používaných komorových průřezů – není vliv uspořádání průřezu z hlediska redistribuce vnitřních sil vyvolané změnou statického systému (a to ani v případě kroučících momentů) významný. Toto velmi zajímavé zjištění umožňuje mj. plně využití zde odvozených a prezentovaných výsledků, bez ohledu na uspořádání průřezu, tj. na hodnotu poměru K (vztah 5).

ZÁVĚR

U půdorysně zakřivených mostů se prokazuje závažnost vlivu změny statického sys-

tému zejména v zásadě se měnícím průběhu kroučících momentů, kdy vyvolané změny mohou dosahovat stovek procent. Naproti tomu na změny ohybových momentů má půdorysné zakřivení (pokud je v rozsahu obvyklém pro mosty) vliv mnohem menší.

Z toho plyne pro projektovou praxi možnost (s tolerovatelnou chybou) stanovit časový vývoj **ohybových momentů**, s respektováním jak skutečného tvarového uspořádání konstrukce (proměnný průřez), tak i skutečného stáří betonu v jednotlivých částech konstrukce, použitím výsledků výpočtu konstrukce přímé, a ty potom případně modifikovat výsledky předkládané studie (úprava hodnot podporových a mezipodporových ohybových momentů, popř. změny ve vzpětí momentových obrazců podle vzorce (8), jak je pro jeden případ ukázáno na obr. 8). Naopak časový vývoj **kroučících momentů**, jehož časové změny jsou zásadní, je nutné sledovat speciálním výpočtem. Avšak vzhledem k tomu, že kroučící účinky se při obvyklém způsobu podepření do sousedních polí přes podpory v zásadě nepřenesají, stačí se přibližně omezit na jednotlivá mostní pole tvořená v časech t_r spojenými konzolami. Pro tyto analýzy lze buď přímo použít zde prezentované vztahy, nebo je možno provést výpočet konkrétního řešeného uspořádání, s respektováním jak skutečného tvarového uspořádání konstrukce (půdorysné zakřivení, proměnný průřez), tak i skutečného stáří betonu v jednotlivých částech konstrukce, použitím relaxační metody (kdy stačí mít k dispozici pouze jakýkoliv rutinní program pro elastický výpočet) nebo postupu založeného na **Age-Adjusted Effective Modulus Method**.

Na druhé straně se prokázalo, že pro široký rozsah používaných průřezů (od širokých, vícekomorových až po vysoké, obr. 10) není sledovaná redistribuce vnitřních sil poměrem ohybových a torz-

Literatura:

- [1] Křístek V.: Jiný způsob výpočtu vlivů dotvarování betonu na staticky neurčitých konstrukcích, Inženýrské stavby č.8., 1963
- [2] Bažant Z. P.: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method, American Concrete Inst., J., Vol. 19, 1972, pp. 212–217
- [3] Vítek J. L.: Výpočetní program DOMO
- [4] Navrátil J.: Výpočetní program TDA (NEXIS)
- [5] Záruba L.: Výpočet oblouků a mostních kleneb za působení tlaku větru, Sborník Vysoké školy Technické v Brně, 1948
- [6] Křístek V., Bažant Z. P.: Shear Lag Effect and Uncertainty in Concrete Box Girder Creep, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, No.3, March 1987 pp. 557–574
- [7] Vráblík L., Křístek V.: Zpřesněná metoda statického řešení prostorově působících mostních konstrukcí se změnami statického systému, Sb. konf. „Betonářské dny 2006“, Hradec Králové, listopad 2006

ních tuhostí významněji ovlivněna. Tento velmi závažný a pro projektanta vítaný závěr umožňuje přímé použití výsledků předkládané studie pro praktické navrhování.

Uvedené výsledky byly získány v rámci řešení projektu GAČR č. 103/06/0674, projektu MŠMT 1M6840770001 v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS a projektu 1F45E/020/120 Ministerstva dopravy České republiky.

Prof. Ing. Vladimír Křístek, DrSc.
Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D.

oba: Katedra betonových a zděných konstrukcí
Fakulta stavební ČVUT v Praze
Text článku byl posouzen odborným lektorem.