

POSOUZENÍ BEZPEČNOSTI ŽELEZOBETONOVÝCH KONSTRUKCÍ V NELINEÁRNÍCH VÝPOČTECH

VERIFICATION OF ULTIMATE LIMIT STATES OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES IN NONLINEAR ANALYSIS

VLADIMÍR ČERVENKA,
JAN ČERVENKA, ZDENĚK JANDA

Posouzení mezních stavů únosnosti železobetonových konstrukcí metodou dílčích součinitelů bezpečnosti v lokálních průřezích není vhodné pro nelineární výpočty. Příčinou jsou odlišnosti v přístupech lineárních a nelineárních výpočtů. Pro nelineární výpočty je doporučeno posouzení globální odolnosti konstrukce a je provedeno srovnání několika metod takového postupu.

Verification of ultimate limit states of reinforced concrete structures based on partial safety factors in local sections is not suitable for nonlinear analysis. This is due to different approaches in linear and nonlinear analyses. It is recommended to perform verification of ultimate limit states on global level and several methods of such verification are compared.

Metoda dílčích součinitelů bezpečnosti, která je dnes nejrozšířenější metodou pro posouzení mezních stavů železobetonových konstrukcí, je založena na lineárním výpočtu vnitřních sil a lokálním posouzení jednotlivých průřezů. Přitom jsou použity návrhové hodnoty materiálových parametrů, které vystihují náhodnou proměnlivost výchozích hodnot, a tím zohledňují bezpečnost konstrukce proti dosažení příslušného mezního stavu.

Použití stejného postupu při nelineárních výpočtech však není vhodné, a to zejména pro odlišný způsob formulace odolnosti konstrukce. Zatímco u lineárních výpočtů je odolnost konstrukce posuzována lokálně v jednotlivých průřezích, u nelineárních výpočtů je zpravidla posuzována globálně na úrovni konstrukčního prvku nebo celé konstrukce. Tato změna přístupu vyvolává potřebu zavedení globálního posouzení bezpečnosti, která zatím v současné praxi navrhování chybí.

Další odlišností je použití rozdílných materiálových modelů pro výpočet vnitřních sil a pro posouzení průřezů u lineárních výpočtů. V důsledku toho nemusí

rozdělení vnitřních sil odpovídat skutečnému chování konstrukce, zatímco u nelineárního výpočtu je použit jeden model a redistribuce vnitřních sil je umožněna. Hodnoceno z hlediska stavební mechaniky – v lineárních výpočtech jsou splněny podmínky rovnováhy, ale nejsou použity vhodné materiálové modely (konstitutivní vztahy). Nutno dodat, že tento přístup je pro řadu praktických případů opodstatněný a efektivní, např. u staticky určitých konstrukcí, kde je rozdělení vnitřních sil závislé pouze na zatížení a nezávislé na použitém materiálovém modelu.

Navrhování stavebních konstrukcí je stále více ovlivňováno snahou o mezinárodní harmonizaci norem a předpisů, zejména JCSS (Joint Committee for Structural Safety), s cílem využívat více pravděpodobnostních metod. Výsledky tohoto úsilí jsou již patrné v nové normě DIN 1402-1 a v evropské normě pro navrhování mostních konstrukcí EN 1992-2. Problematika je prezentována v odborné literatuře [1].

Cílem článku je upozornit odbornou veřejnost na odlišnosti při posuzování mezních stavů pomocí nelineárních výpočtů a numerických metod. První autor je členem komise „fib SAG 5 New Model Code“, která připravuje příští modelovou normu fib pro navrhování betonových konstrukcí.

METODA DÍLČÍCH SOUČINITELŮ BEZPEČNOSTI

Postup při navrhování podle dílčích součinitelů bezpečnosti lze ve stručnosti shrnout následovně:

1. Koncepční návrh se stanovením rozměrů na základě přibližných a empirických metod.
2. Výpočet vnitřních sil za předpokladu lineárně pružného materiálu pro všechny relevantní kombinace zatížení. Výsledkem jsou návrhové hodnoty účinku zatížení E_d v kritických průřezích

$$E_d = \gamma_{S1} S_{n1} + \gamma_{S2} S_{n2} + \dots + \gamma_{Sn}, \quad (1)$$

kde S_{ni} je intenzita normového zatíže-

ní, γ_{Si} je dílčí součinitel zatížení zahrnující bezpečnost s ohledem na náhodnou proměnlivost zatížení a i je označení typu zatížení.

3. Návrhová odolnost kritických průřezů R_d se vypočte na základě návrhových materiálových hodnot

$$R_d = r(f_d, \dots), \quad f_d = f_k / \gamma_m \quad (2)$$

Návrhové materiálové parametry f_d jsou odvozeny z charakteristických hodnot f_k pomocí redukce dílčím součinitelem bezpečnosti γ_m pro příslušný materiál.

4. Podmínka pro posouzení mezního stavu průřezu je

$$E_d < R_d \quad (3)$$

V podmínce (3) je bezpečnost vyjádřena pravděpodobností výskytu návrhových hodnot materiálových parametrů f_d , není však známa pravděpodobnost výskytu návrhové hodnoty odolnosti průřezu R_d nebo splnění podmínky mezního stavu (3).

Při návrhu konstrukce se postupuje tak, že se pro zvolený tvar konstrukce navrhne výztuž tak, aby byla splněna podmínka (3). Kroky 2 až 4 se podle potřeby opakují. Kromě toho je třeba vyhovět dalším konstrukčním požadavkům a posoudit i mezní stav použitelnosti.

Uvažujme nyní, že ve shora uvedeném postupu použijeme ve druhém kroku výpočet založený na nelineárních materiálových modelech. Posuzování průřezů podle kroků 3 a 4 je pak nadbytečné, neboť materiálové zákony jsou v tomto výpočtu splněny a jsou jedním z předpokladů řešení. Je však možné uplatnit posouzení bezpečnosti podle podmínky (3) na globální úrovni pro část nebo celek konstrukce. Dalším problémem je, že lokální posouzení se provádí v řezech, které lze někdy předem jen obtížně stanovit.

Z těchto důvodů je žádoucí definovat nové metody posouzení pro nelineární metody výpočtu. Při tom se zdá vhodnější posuzovat globální odolnost konstrukce pro dané účinky zatížení, než jednotli-

vé průřezy. Výhody navrhovaného postupu jsou následující:

- nelineární výpočet zahrnuje automaticky posouzení všech bodů konstrukce, nikoliv pouze zvolených průřezů,
- globální posouzení poskytuje informace o globální bezpečnosti konstrukce, odolnosti proti kinematickému kolapsu, robustnosti a přetvárných vlastnostech,
- posouzení bezpečnosti na globální úrovni může přinést ekonomické výsledky díky použití návrhu na vyšší technické úrovni i díky snížení rizika nebezpečného návrhu.

METODY POSOUZENÍ BEZPEČNOSTI PŘI NELINEÁRNÍCH VÝPOČTECH

Návrhová odolnost

Naším cílem je rozšířit současnou metodu posouzení podle dílčích součinitelů bezpečnosti na globální úroveň tak, aby byla v souladu s metodikou nelineárního výpočtu a byla pro něj použitelná. Proto zavádíme pojem návrhová odolnost, která byla dosud použita v užším významu pouze pro průřez, viz rovnice (2), také pro popis globální odolnosti $R = r(f, a, \dots, S)$, která je funkcí materiálových parametrů f , geometrie a , zatížení S apod. Zatížení S může mít v jednoduchém případě význam síly nebo intenzity rovnoměrného zatížení, obecně může představovat soubor zatěžovacích stavů a historie jejich působení. Zatížení je udáno normovou hodnotou a lze jej zvyšovat, přičemž zvýšení zatížení až na mez únosnosti představuje rezervu bezpečnosti proti dosažení mezního stavu.

Pro účely posouzení spolehlivosti konstrukce potřebujeme vyhodnotit proměnlivost odolnosti v důsledku různých náhodných vlivů: materiálových vlastností, geometrie (tolerancí) a případně dalších. V důsledku náhodné povahy vstupních parametrů má funkce odolnosti r též náhodné vlastnosti, které lze popsat pomocí obvyklých veličin: průměrné hodnoty odolnosti R_m , charakteristické hodnoty odolnosti R_k (tj. 5% kvantil) a návrhové hodnoty odolnosti R_d .

Stavy zatížení E_d a odolnosti R_d představují body v mnohorozměrném prostoru, a proto je výhodné úroveň odolnosti vyjádřit relativně ve vztahu k návrhovému zatížení jako poměr $k_R = R / E_d$ a podmínku ze vztahu (3) lze přepsat do tvaru

$$\gamma_R < k_R, \quad R_d = R_m / \gamma_R, \quad (4)$$

kde γ_R je globální součinitel bezpečnosti pro odolnost konstrukce a R_m je průměrná hodnota odolnosti.

V uvedeném postupu zbývá stanovit hodnotu globálního součinitele γ_R , což se ukazuje problematické. Z výzkumů vyplývá, že globální součinitel bezpečnosti je závislý na vlastnostech konstrukce a způsobu porušení, viz. např. [1]. Konstrukce se stejnými náhodnými vlastnostmi vstupních parametrů avšak jinou geometrií a vyztužením mají pro stejnou variabilitu vstupních parametrů rozdílné globální stupně bezpečnosti. Tomuto problému se lze vyhnout přímým výpočtem návrhové odolnosti R_d .

Ke globálnímu posouzení se nabízí řada postupů lišících se mírou využití pravděpodobnostních metod:

- metoda založená na odhadu variačního koeficientu odolnosti, dále nazývaná ECOV,
- metoda globálního součinitele podle EN 1992-2,
- metoda dílčích součinitelů analogicky s dnešní praxí, dále PSF,
- stanovení návrhové odolnosti pomocí pravděpodobnostního výpočtu.

Je třeba dodat, že v této studii se zabýváme pouze bezpečností konstrukce pro dané zatížení. To znamená, že v návrhové odolnosti je vystižena pouze variabilita vlastností konstrukce. Nejistoty v zatížení jsou řešeny odděleně v rámci návrhového zatížení, viz. podmínka (3). Není též zohledněna otázka modelových nejistot, kterou lze zahrnout zvláštním součinitelem. V případě nelineárních metod se však předpokládá modelování s vysokým stupněm znalostí ve srovnání s běžnou praxí, a modelové nejistoty proto není nutno uplatnit.

V následující kapitole uvedeme stručný popis metod posouzení použitých v této studii.

Metoda odhadu variačního koeficientu (ECOV)

Tato metoda, vychází z práce [1], kde je prokázáno, že variabilita odolnosti nosníků a sloupů závisí na stupni vyztužení, a v důsledku toho i globální součinitel bezpečnosti je závislý na vyztužení. Proto se stanovení jednotného globálního součinitele, podobně jako v EN 1992-2, jeví jako neopodstatněné a autoři volí jiný přístup, založený na odhadu variačního sou-

činitele odolnosti konstrukce V_R . Tu lze stanovit na základě znalosti parametrů náhodného chování odolnosti, tj. průměru R_m a charakteristické hodnoty R_k , které lze odhadnout jako:

$$R_m = r(f_m, \dots), \quad R_k = r(f_k, \dots), \quad (5)$$

kde jsou použity vstupní parametry f_m – průměrné a f_k – charakteristické.

Dále se předpokládá, že odolnost je popsána lognormálním rozdělením. Za těchto předpokladů lze přibližně vypočítat variační koeficient odolnosti jako

$$V_R = \frac{1}{1,65} \ln \left(\frac{R_m}{R_k} \right) \quad (6)$$

Globální součinitel bezpečnosti lze potom stanovit následovně:

$$\gamma_R = \exp(\alpha_R \beta V_R) \quad (7)$$

V tomto řešení je bezpečnost zohledněna váhovým součinitelem odolnosti α_R , a indexem spolehlivosti β . Pro příklady v této studii byly použity hodnoty $\alpha_R = 0,8$, $\beta = 4,7$ podle Eurocode 2 EN 1991-1. Globální součinitel γ_R a návrhovou hodnotu odolnosti R_d lze potom stanovit jako

$$\gamma_R \cong \exp(-3,76 V_R), \quad R_d = \frac{R_m}{\gamma_R} \quad (8)$$

Metoda globálního součinitele dle EN 1992-2

Návrhová odolnost se stanoví dle výrazu

$$R_d = r(\tilde{f}_{ym}, \tilde{f}_{cm}, \dots, S) / \gamma_R, \quad (9)$$

kde vstupní parametry jsou uváženy průměrnými hodnotami. Průměrná mez průtažnosti výztuže $\tilde{f}_{ym} = 1,1 f_{yk}$. Průměrná pevnost betonu je snížena s ohledem na diferenciaci náhodných vlastností materiálů $\tilde{f}_{cm} = 0,843 f_{ck}$.

Globální součinitel bezpečnosti je navržen jednotně hodnotou $\gamma_R = 1,27$.

Metoda dílčích součinitelů bezpečnosti (PSF)

V tomto případě je prováděn přímý nelineární výpočet na základě návrhových hodnot vstupních parametrů.

$$R_d = r(f_d, \dots, S) \quad (10)$$

Vzhledem k použití extrémních hod-

not materiálových parametrů může tento postup představovat stav, který se příliš liší od typického chování konstrukce. Tento postup je však přímou aplikací současné metody dílčích součinitelů.

Pravděpodobnostní výpočet

Jedná se o teoreticky nejlépe podložený způsob výpočtu návrhové odolnosti, doporučený komisí JCSS [2]. Funkce mezního stavu je vyhodnocena pomocí numerických metod. Odolnost konstrukce je popsána deterministickým nelineárním výpočtem založeným na metodě konečných prvků (MKP). Náhodné chování je uváženo pomocí náhodných vlastností vstupních parametrů výpočtu. Pravděpodobnostní výpočet zahrnuje následující kroky.

- Znázornění vstupních parametrů numerického modelu. Parametry jsou definovány pomocí průměrných hodnot, variačních koeficientů (případně dalších parametrů) a typu rozdělení.

Tento krok vystihuje náhodný charakter vstupních hodnot nelineárního výpočtu.

- Stanovení náhodných vlastností funkce mezního stavu. Výpočet náhodných vzorků odolnosti pomocí metody Monte Carlo. Pro jednotlivé případy – vzorky je proveden deterministický výpočet pomocí MKP. Jedná se o časově náročný úkol, kde konstrukce je opakovaně řešena pro různé kombinace náhodně vybraných vstupních parametrů. V případě použití metody LHS lze značně snížit počet vzorků a metoda se stává prakticky použitelnou. Pravděpodobnostní vyhodnocení náhodného chování odolnosti, typu rozdělení, jeho parametrů.
- Stanovení návrhové hodnoty odolnosti R_d pro požadovaný index spolehlivosti β nebo pravděpodobnost porušení P_f .

Srovnávací studie

Uvedené metody posouzení byly porov-

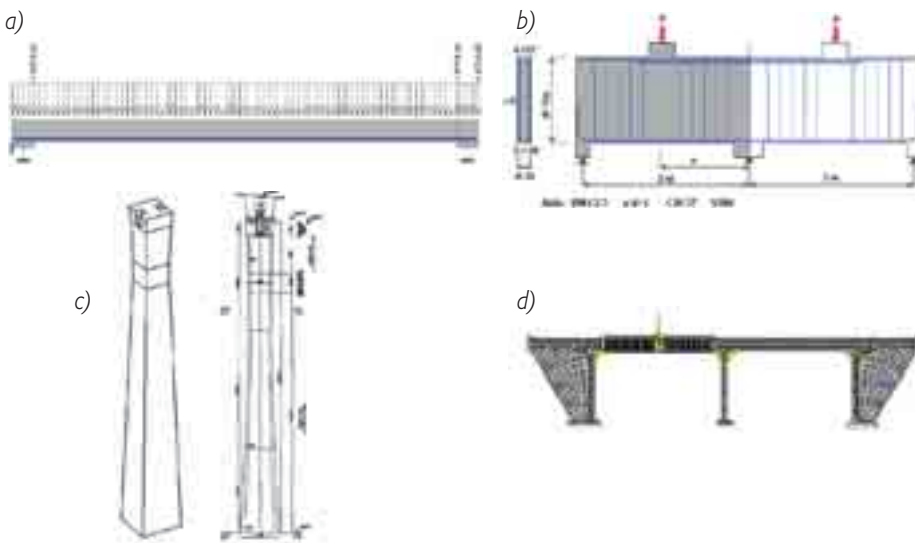
nány na několika praktických příkladech lišících se složitostí, velikostí a chováním. Jsou zde zahrnuty všechny typy porušení: tečením výztuže, smykem a tlakovým porušením včetně deformací 2. řádu. Vzhledem k rozsáhlosti studie uvádíme pouze přehled výsledků studie a podrobnější výsledky pro jeden příklad. Více informací je obsaženo v [3].

Nelineární výpočet programem ATENA

Nelineární výpočty v této studii byly provedeny programem ATENA, který je speciálně zaměřen na simulaci železobetonových konstrukcí v celém rozsahu jejich chování včetně porušení [4, 5]. Výpočet je založen na metodě konečných prvků, nelineárních konstitutivních zákonech pro beton, výztuž a jejich spolupůsobení. Tahové chování betonu je modelováno pomocí lomové mechaniky metodou rozetřených trhlin. Tlakové chování vystihuje účinek sevření na vzrůst pevnosti a je modelováno teorií plasticity. Výztuž je modelována jak pomocí prutových prvků, tak jako rozetřená složka v železobetonu. Nelineární řešení probíhá v zatěžovacích krocích s iteracemi uvnitř kroku. Pravděpodobnostní řešení bylo provedeno pomocí programu SARA.

OVĚROVACÍ PŘÍKLADY

- prostý deskový nosník zatížený rovnoměrně na rozpětí 6 m, příčný průřez $h = 0,3$ m, $b = 1$ m, výztuž $5 \text{ } \varnothing 14$,

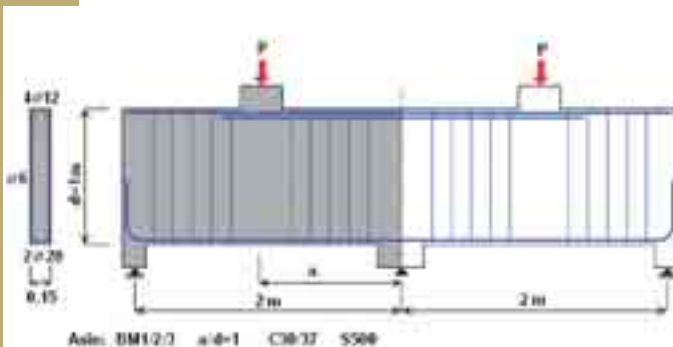


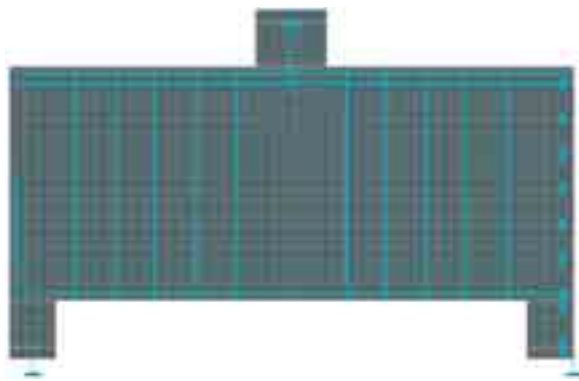
Obr. 1 Přehled příkladů a) prostý nosník, b) spojitý stěnový nosník, c) mostní pilíř, d) mostní rám

Fig. 1 Examples a) simply supported beam, b) deep beam, c) bridge pier, d) bridge frame

Obr. 2 Geometrie a vyztužení stěnového nosníku
Fig. 2 Geometry and reinforcement of deep beam

Obr. 3 Stěnový nosník po zkoušce v laboratoři
Fig. 3 Deep beam after testing in laboratory





Obr. 4 Model pro 2D výpočet v programu ATENA

Fig. 4 2D model in program ATENA

- beton C30/37, ocel R500, porušení ohybem a tečením výztuže (obr. 1a),
- spojitý stěnový nosník o dvou polích (obr. 1b), stejný nosník byl experimentálně zkoušen na Technické univerzitě v nizozemském Delftu [5], porušení smykové šikmou trhlinou,
- mostní pilíř komorového průřezu, výšky 80 m, převzatý z praktického návrhu mostu v Itálii [7], zatížení v hlavě pilíře normálovou silou a momentem, porušení v tlaku s účinky deformací druhého řádu (obr. 1c),
- rámová konstrukce železničního mostu ve Švédsku, porušení v kombinaci ohybu a smyku (obr. 1d).

V následující kapitole je podrobně popsán postup posouzení s využitím nelineárního výpočtu na příkladu stěnového nosníku.

Stěnový nosník

Rozměry, vyztužení a zatížení stěnového nosníku jsou patrné z obr. 2. Nosník stejných rozměrů a vlastností materiálů byl experimentálně zkoušen na Technické univerzitě v Delftu [5] (obr. 3). Jedná se o staticky neurčitou konstrukci, kde dochází k redistribuci vnitřních sil. Vzhledem k tvaru nosníku má nosníková teorie omezenou platnost, neboť není zcela zachována rovinnost průřezů. K příkladu je k dispozici řada experimentálních výsledků, které umožňují ověřit správnost výpočtu.

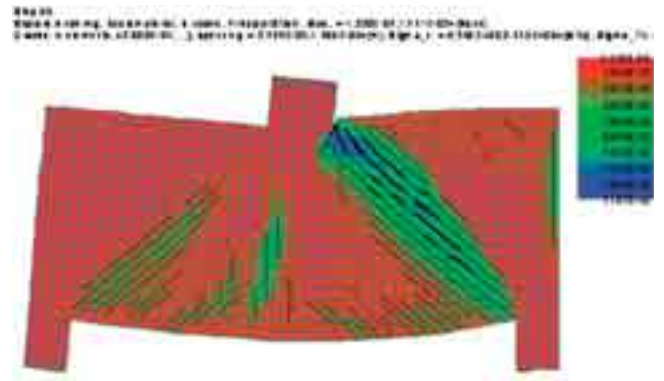
Materiálové vlastnosti použité pro výpočet podle různých metod jsou uvedeny v tab. 1. Pro simulaci skutečného chování byly použity materiálové parametry získané experimentálně (simulation). Výpočtový model pro stav rovinné napjatosti je

ukázán na obr. 4. Příklad vypočteného stavu napjatosti a porušení nosníku na mezi únosnosti je ukázán na obr. 5. Způsob porušení diagonální trhlinou je patrný též z experimentu na obr. 6, což potvrzuje správnost numerického výpočtu. Výsledné závislosti zatížení-průhyb pro různé případy materiálových parametrů jsou ukázány na obr. 7. Nejnižší odolnost je dosažena při použití návrhových hodnot (design).

Obr. 8 ukazuje soubor pracovních diagramů nosníku generovaných pro pravděpodobnostní výpočet. Tento typ výsledků byl použit pro stanovení výpočtové hodnoty na základě požadovaného indexu spolehlivosti pomocí programu SARA.

Výsledky studie

Výsledky posouzení podle různých metod jsou shrnuty v tab. 2. V tabulce jsou uvedeny návrhové hodnoty odolnosti R_d případně koeficientu zatížení k_R . Pro účely



Obr. 5 Nelineární výpočet, stav trhlin a deformace při dosažení meze únosnosti

Fig. 5 Nonlinear analysis, crack pattern and deformed form at failure

porovnání různých metod je uveden též poměr R_d / R_d^{PSF} , kde za srovnávací veličinu je zvolena hodnota odolnosti R_d^{PSF} podle stávající metody dílčích součinitelů. Ze srovnání výsledků vyplývá, že všechny metody dávají přibližně stejné výsledky. Jedná se sice o omezenou studii, ale zahrnuje konstrukce různých tvarů, velikostí a s různými způsoby porušení.

Velmi zajímavé je zjištění, že metoda dílčích součinitelů se jeví jako použitelná pro nelineární výpočty, což je v rozporu s dosud převládajícím názorem odborníků. Autoři se však domnívají, že lze metodu dílčích součinitelů bezpečnosti použít, a to při splnění určitých podmínek, které lze formulovat následovně:

Tab. 1 Materiálové vlastnosti stěnového nosníku

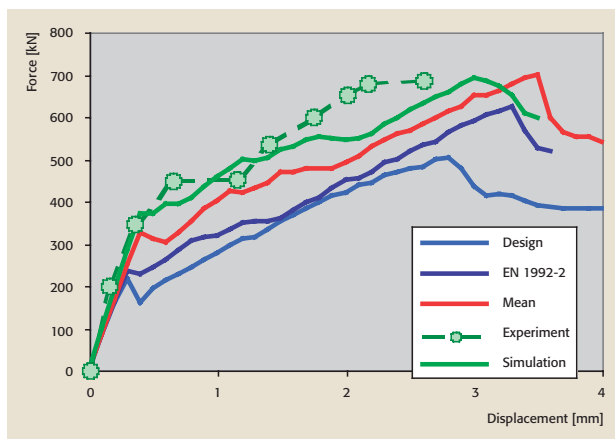
Tab. 1 Material characteristics of deep beam

Metoda	PSF	EN1992-2	Pravděpodobnostní		
			průměr	směr. odch.	typ
Beton					
E_c [Gpa]	32	32	32	4,1	lognorm.
F_c [MPa]	20	25	38	4,9	lognorm.
f_t [MPa]	1,3	1,7	2,9	0,6	Weibul
G_f [N/m]	35	44	66	13	Weibul
Ocel					
f_{sy} [MPa]	434	550	550	31	lognorm.

Tab. 2 Přehled výsledků

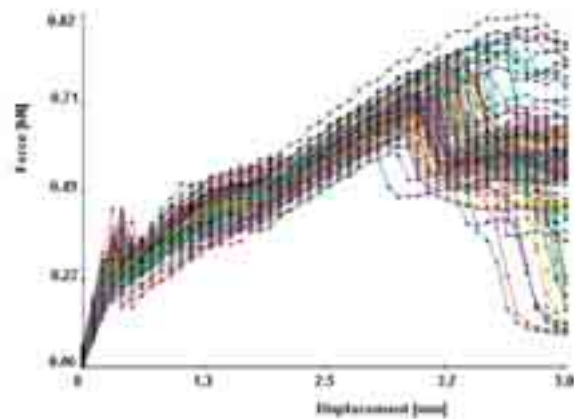
Tab. 2 Summary of results

Použitá metoda	Prostý nosník		Stěnový nosník		Pilíř mostu		Mostní rám	
	k_R	k_d / k_d^{PSF}	R_d	R_d / R_d^{PSF}	R_d	R_d / R_d^{PSF}	R_d	R_d / R_d^{PSF}
PSF	1,29	1,0	501	1,0	169	1,0	6,68	1,0
ECOV	1,29	1,0	510	1,02	179	1,06	6,52	0,97
EN 1992-2	1,23	0,95	490	0,98	166	0,98	6,24	0,93
Pravděpodobnost	1,21	0,96	493	0,98	173	1,02	6,77	1,01



Obr. 7 Diagram zatížení-průhyb pro různé vstupní hodnoty

Fig. 7 Load-displacement diagrams for various input parameters



Obr. 8 Soubor zatěžovacích diagramů pro pravděpodobnostní výpočet

Fig. 8 Set of load-displacement diagrams for probability-based analysis



Obr. 6 Experiment, stav porušení po zkoušce

Fig. 6 Experiment, failure state after testing

Výpočtovou odolnost R_d^{PSF} získanou nelineárním výpočtem na základě návrhových vstupních parametrů podle dílčích součinitelů bezpečnosti jako $f_d = f_k / \gamma_m$ lze použít pro posouzení podle podmínky (3), pokud při úrovni návrhového zatížení E_d nedochází v konstrukci k plastickým přetvořením výztuže a betonu. Ve výpočtu je automaticky zahrnuto posouzení všech bodů (průřezů) konstrukce. V tomto případě se uplatní pouze redistribuce vnitřních sil v důsledku trhlin. Vliv vzniku a šíření trhlin je však obvykle velmi významným zdrojem redistribuce vnitřních sil proti lineárnímu výpočtu (např. redukce podporových momentů).

Otevřeným problémem zůstává otázka vlivu vyztužení na variační koeficient odolnosti, která byla prokázána Holickým v práci [1]. V prezentované studii nebyl vliv výztuže systematicky sledován a metody umožňující přesnější vystižení variability odolnosti nebylo tedy možno důsledně prověřit. Proto se autoři domnívají, že je žádoucí v práci pokračovat tak, aby byla tato otázka variability odolnosti lépe doložena.

ZÁVĚR

Pro nelineární výpočty je vhodné pro podmínku posouzení mezního stavu použít globální odolnost a její pravděpodobnostní hodnoty: průměr, charakteristickou hodnotu a návrhovou hodnotu. Poměr průměrné hodnoty k návrhové představuje globální součinitel odolnosti.

Z provedené studie čtyř příkladů vyplývá, že všechny použité metody posouzení globální odolnosti konstrukce dávají přibližně stejné výsledky. V rámci malých rozdílů dává metoda globálního součinitele podle EN 1992-2 největší bezpečnost. Metoda odhadu variačního koeficientu odolnosti (ECOV) navrhovaná autory umožňuje zohlednit vliv variability odolnosti. Provedená studie potvrzuje možnost použití metody dílčích součinitelů bezpečnosti pro posouzení běž-

ných typů konstrukcí pomocí nelineárních metod.

Tato práce byla provedena v rámci projektu „Informační společnost“, VITESPO, 1ET409870411, Akademie věd České republiky. Finanční podpora tohoto projektu umožnila dosáhnout publikovaných výsledků.

Dr. Vladimír Červenka
Ing. Jan Červenka, Ph.D.

oba: Červenka Consulting
Předvoje 22, 162 00 Praha 6
tel.: 220 610 018

e-mail: cervenka@cervenka.cz, www.cervenka.cz

Zdeněk Janda
Náchodská 31, 19300 Praha 9
e-mail: zdenek.janda@atlas.cz

Literatura:

- [1] Holický M., Holická N.: Globální součinitele odolnosti železobetonových prvků, sb. konfer. 11. Betonářské dny, Hradec Králové 2004, str. 287-292
- [2] JCSS: Probabilistic model code. JCSS working materials, <http://www.jcss.ethz.ch/>
- [3] Janda Z.: Nelineární modelování prostorových zděných a železobetonových konstrukcí programem ATENA, Diplomní práce, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, Praha, 2007
- [4] Červenka V.: Computer simulation of failure of concrete structures for practice. 1st fib Congress 2002 Concrete Structures in 21 Century, Osaka, Japan, Keynote lecture in Session 13, 289-304
- [5] Červenka V., Jendele L., Červenka J.: ATENA Program Documentation, Červenka Consulting, Praha, 2003-2006
- [6] Asin M.: The Behaviour of Reinforced Concrete Continuous Deep Beams, Ph.D. Dissertation, Delft University Press, The Netherlands, 1999, ISBN 90-407-2012-6
- [7] Bertagnoli G., Giordano L., Mancini G.: Safety format for the nonlinear analysis of concrete structures, STUDIES AND RESEARCHES, V.25, 2004, Politechnico di Milano, Italy