

# BETONOVÉ DESKY NA PODDAJNÉM PODKLADU VYSTAVENÉ VLIVŮM VYSÝCHÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ

## CONCRETE SLABS ON THE ELASTIC FOUNDATION EXPOSED TO EFFECTS OF DRYING AND SHRINKAGE

JAN L. VÍTEK,  
ALENA KOHOUTKOVÁ,  
VLADIMÍR KRÍSTEK

*Betonové desky jsou vystaveny postupnému vysychání a teplotním změnám, které vedou ke vzniku vlastních napětí a deformací. Rychlé vysychání může způsobit potrhání povrchu desky. Metoda výpočtu je ukázána na příkladu deskového pásu. Historie rozdělení napětí a ohybových momentů a deformované tvary ilustrují účinky smršťování na desku. Jsou ukázány hranice použitelnosti klasického postupu výpočtu založeného na použití průměrných průřezových veličin.*

*Concrete slabs are exposed to progressive drying and to temperature changes. It results in development of eigenstresses and strains. Rapid drying of the concrete surface may cause cracking. The method of analysis shown on the example of a slab strip takes the progressive drying and temperature development into account. History of the stress and bending moment distribution and deformed shapes illustrate the effect of shrinkage. The example shows the limits of the classical approach based on the average cross-sectional values.*

Povrch betonových konstrukcí je vystaven vlivům okolního prostředí se změnami vlhkosti a teplotních účinků. Oba tyto jevy by se u **volných** prvků elementárního objemu projevil pouze objemovými změnami (teplotní roztažností a smršťováním závislým na snižování vlhkosti) bez vzniku napětí. U skutečných konstrukcí je časový průběh teploty a vlhkosti v jednotlivých bodech betonového tělesa rozdílný, avšak vyvolané deformace musí splňovat podmínky kompatibility (pokud nedojde k porušení betonového prvku) a důsledkem je vznik napětí. V mnoha případech mohou vzniklá napětí dosahovat značných hodnot a vést ke vzniku trhlin.

Je zřejmé, že účinky jednotlivých druhů zatížení nelze superponovat, ale je nutné

řešit možné kombinace všech zatížení současně. Kromě působení vnějších zatížení je chování betonových prvků významně ovlivňováno stářím betonu, neboť v průběhu času se mění pevnost betonu a modul pružnosti, historií průběhu vlhkosti a teploty a historií zatěžovacího procesu.

### KONCEPCE ŘEŠENÍ

Základní úlohou je řešení napětí a deformace deskového útvaru vystaveného na svých površích obecně rozdílným účinkům okolního prostředí.

Pro určení časového průběhu **vlhkosti** v betonu může být použita teorie difuzivity. Obecný tvar rovnice pro řešení problému rozložení vlhkosti podél tloušťky deskového prvku, po zjednodušení a po zavedení funkce  $h(z, t)$ , udávající hodnotu relativní vlhkosti v hloubce  $z$  v čase  $t$ , je možno upravit do formy parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ C(t, h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] \quad (1)$$

kde závislost  $C$  na  $h$  lze formulovat vztahem závislejícím na difuzivitě betonu  $C_1(t_e)$ , která je dále funkcí ekvivalentního času. Pro výpočet bylo použito vyjádření

$$C_1(t_e) = C_0 \left( 0,3 + 3,6t_e^{-0,5} \right) \cdot 10^{-6} \quad (2)$$

[m<sup>2</sup>/den]

kde  $C_0$  je základní difuzivita.

Ekvivalentní čas ubíhá rychleji nebo pomaleji než reálný čas podle závislosti

$$t_e = \int_0^t \Phi_h(t') \Phi_T(t') dt' \quad (3)$$

kde bylo použito

$$\Phi_T = 0,5 \left( 1 + h^2 \right) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_T &= \exp \left( \frac{Q}{RT_0} - \frac{Q}{RT} \right) = \\ &= \exp \left( \frac{5000}{T_0} - \frac{5000}{T} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$t'$  – reálný čas měřený od vybetonování desky

$Q$  – aktivací energie,

$R$  – plynová konstanta,

$T$  – absolutní teplota [K],

$T_0$  – referenční teplota [K], např. odpovídající 20 °C.

Pro výpočet rozdělení **teploty** po tloušťce deskového prvku lze použít formálně stejné diferenciální rovnice jako v případě vlhkosti

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (6)$$

řešení je poněkud jednodušší, neboť lze přijmout předpoklad, že součinitel tepelné vodivosti  $\alpha$  je nezávislý na čase a na okamžité teplotě.

Základní smršťování je dáno vlhkostí v elementu

$$\epsilon_s = \kappa \left( 1 - h^3 \right) \quad (7)$$

kde  $\kappa = -0,0008$ .

Volná deformace vyvolaná změnou teploty je dána známým vztahem

$$\Delta \epsilon_T = \alpha_T \Delta T \quad (8)$$

kde  $\alpha_T$  značí součinitel teplotní roztažnosti ( $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ) a  $\Delta T$  je rozdíl teplot ve sledovaném okamžiku oproti počátečnímu stavu.

Výpočetní postup spočívá v postupném řešení dílčích úloh, jejichž výsledky jsou podkladem pro iterační proces, jímž se určí deformace konstrukce. Na základě deformací a nelineárních konstitutivních vztahů a s uvážením reologických faktorů je počítáno napětí v jednotlivých bodech průřezů deskových prvků. Teorie řešení vychází z obecného postupu odvozeného v [1].

Výsledkem řešení jsou deformace konstrukce jako celku, vnitřní síly, resp. napětí v průřezech a dále hodnoty poměrných deformací, vlhkosti, teploty a napětí v dílčích bodech a v jednotlivých vrstvách podél tlouštěk deskových průřezů.

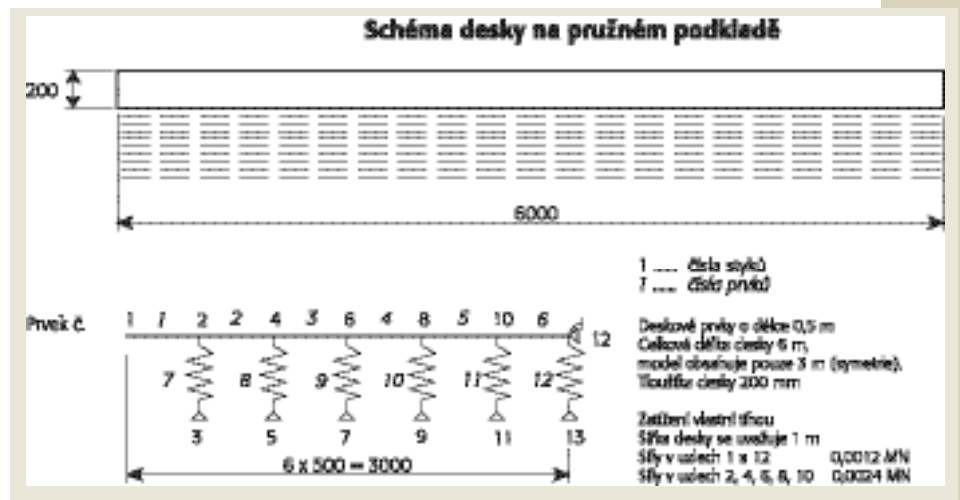
Ke složkám deformace vyvolaným pou-

hou změnou vlhkosti a teploty přibývají další složky: smršťování závislé na napětí (stress induced shrinkage) a teplotní roztažnost závislá na napětí (stress induced thermal dilatation). Smršťování závislé na napětí je složka deformace od napětí související s vysycháním betonu (snižováním jeho vlhkosti); tato složka deformace je též často označována jako dotvarování při vysychání betonu (drying creep).

Působením napětí se objevuje další složka deformace, která je běžně označovaná jako základní dotvarování betonu (basic creep). Základní dotvarování vyplývá z chování vlastního betonu a není důsledkem změny podmínek prostředí. Jde o vztah napětí a deformace při konstantní teplotě a vlhkosti. Společně s pružnou částí deformace od napětí může být popsána např. funkcí dotvarování. (Vliv proměnné vlhkosti na dotvarování, tzv. drying creep, je již vyjádřen formou dříve zmíněného smršťování závislého na napětí). Tahová napětí mohou dosahovat ve srovnání s pevností betonu v tahu relativně vysokých hodnot, zvláště v případech mladého betonu. Následkem těchto jevů je deformace větší než by odpovídalo lineárnímu chování materiálu (strain softening).

Pro řešení vlivu dotvarování je možno použít numerický postup založený na Maxwellově řetězovém modelu, který umožňuje efektivním způsobem respektovat vliv historie zatěžování při zachování konstitutivních vztahů v přírůstkovém tvaru, podrobněji v [1] a [3]. Při řešení jsou respektovány všechny složky deformace. Princip řešení deskové konstrukce složené z prvků je založen na deformační metodě. Výpočet probíhající v jednotlivých vrstvách desky a v časových krocích se opakuje tak dlouho, až výsledné složky deformace určené v následujících iteracích splňují požadovaná kritéria přesnosti. V průběhu času výpočet postupuje po zvolených intervalech přírůstkovou metodou. Efektivní způsob respektování historie průběhu napětí pomocí Maxwellova řetězového modelu nevyžaduje uchování celého zatěžovacího procesu v paměti počítače.

Vstupní údaje pro řešení úlohy popisují betonovou desku a okolní vlivy, které na ni působí. Vlastnosti konstrukce jsou charakterizovány materiálem – betonem, geometrickým tvarem, vyztužením ocelovými pruty a podepřením. Okolními vlivy se rozumí vlhkost a teplota na počátku



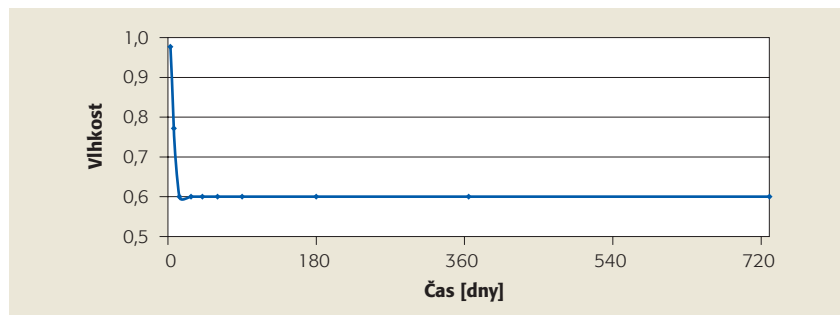
Obr. 1 Rozdělení desky na prvky  
Fig. 1 Structural model of the slab

řešení, jejich průběh na površích deskových prvků a vnější zatížení konstrukce.

Materiálové vlastnosti patří mezi nejméně spolehlivé vstupní parametry. Patří sem např. modul pružnosti, funkce dotvarování, tahová pevnost betonu, konstanty popisující vedení vlhkosti a tepla v betonu atd.

Vlhkost a teplota se zadává přímo na površích jednotlivých deskových prvků. Jejich časový průběh může být výhodně vyjádřen ve tvaru Fourierových řad. Je to způsob umožňující vzít v úvahu roční, denní i různé další opakované cykly vlh-

jednotlivých elementů jsou stanoveny na základě rozměrů (moment setrvačnosti, délka) a fyzikálních vlastností charakterizovaných pseudoelastickými moduly  $E''$ . Ty jsou různé pro jednotlivé vrstvy. Na každém elementu jsou zadány okrajové a počáteční podmínky popisující vlhkost a teplotu na jeho površích. Dále je možné zadat vnější zatížení působící na styky elementů v požadovaném čase jako soustavu osamělých břemen, resp. momentů.

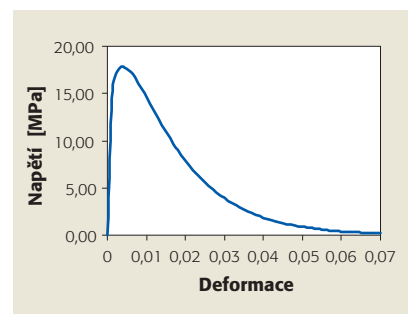


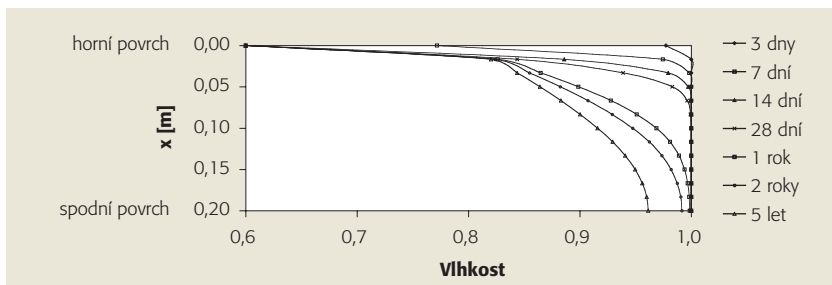
Obr. 2 Časový průběh změny vlhkosti horního povrchu desky  
Fig. 2 Time development of the humidity on the top surface of the slab

kosti nebo teploty, které se mohou reálně vyskytnout.

Deska sestavená z jednotlivých elementů spojených ve stýcích je zadána geometrií a vlastnostmi jednotlivých elementů (rozměry, druh materiálu, výztuž). Podepření desky na poddajném podkladu je idealizováno soustavou pérových prutových prvků. Tyto poddajné podporevé prvky působí pouze v tlaku. Tuhosti

Obr. 3 Pracovní diagram betonu pro tahové působení – složka x  
Fig. 3 Tensile stress development versus strain component x





Obr. 4 Průběh vlhkosti po tloušťce desky pro různá stáří betonu

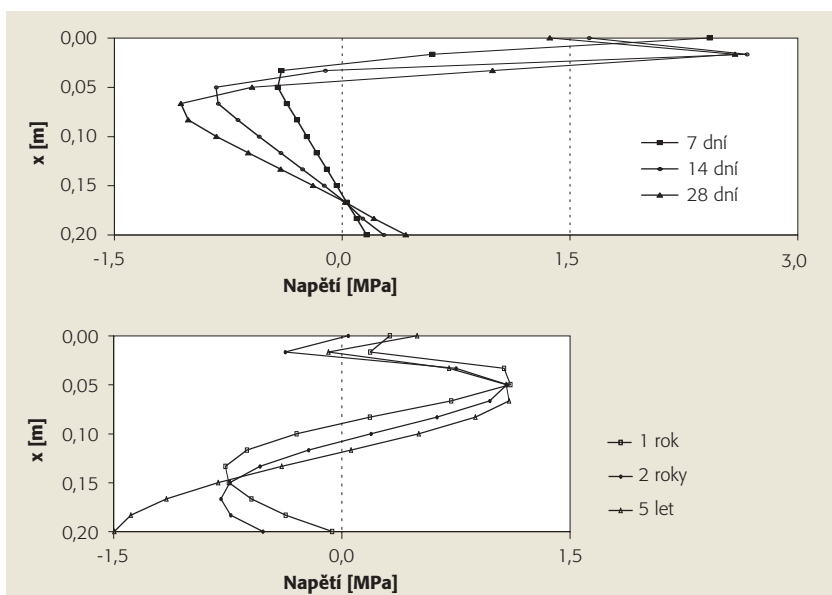
Fig. 4 Humidity distribution along the thickness of the slab in different ages of concrete

Výsledkem řešení deformační metodou jsou přemístění styků, na jejichž základě jsou dále počítány přírůstky napětí v jednotlivých vrstvách s uvážením konstitutivních vztahů, dotvarování a vzniku trhlin. Pro vypočtený přírůstek napětí jsou znovu spočítány deformace od smršťování a teploty vyvolané napětím, znovu probíhá řešení a jsou určeny nové deformace a přírůstky napětí. Proces se opakuje tak dlouho, až rozdíl výsledných deformací v následujících iteracích je menší než požadovaná hodnota. Kritérium rozdílu deformací musí být splněno u všech elementů všech vrstev. Potom řešení může pokračovat v dalším časovém intervalu.

Všechny výpočetní procedury manipulu-

Obr. 6 Průběh napětí po tloušťce desky pro různá stáří betonu – prvek 3

Fig. 6 Stress variation along the thickness of the slab – element 3



ji s přírůstkem napětí, resp. deformací. Výsledné hodnoty napětí a deformací jsou součtem přírůstků z jednotlivých intervalů. Během výpočtu se v paměti počítače nehromadí žádné údaje potřebné pro

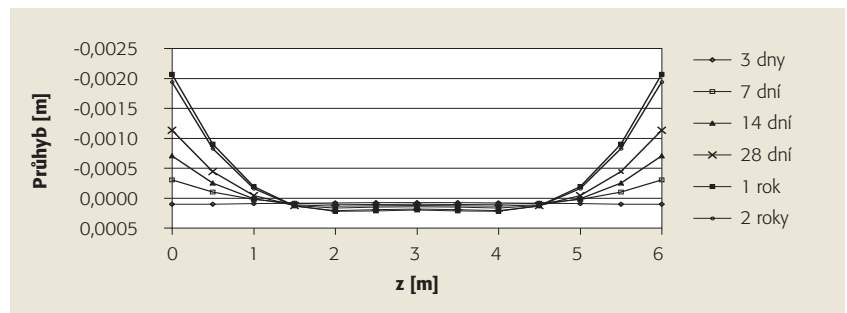
jeho další pokračování. Rychlost výpočtu je stejná ve všech intervalech a výpočetní čas je úměrný počtu intervalů, na které byl časový úsek rozdělen.

V deskách vyztužených ocelovými pruty výztuž výrazně neovlivňuje vysychání betonu ani šíření tepla. Na druhé straně podstatně ovlivňuje napjatost v betonu, jeho deformace a omezuje vznik a rozvoj trhlin. Výpočet rozdělení vlhkosti, teploty a volných deformací ve vyztuženém prvku zůstává stejný jako u prostého beto-

nu. Při výpočtu tuhosti elementů jsou k vrstvám z prostého betonu přidány ještě doplňující vrstvy ocelové (v místech uložení výztuže). Napětí ve výztužných prutech je počítáno z poměrných deformací ocelových vrstev, při současném respektování deformace oceli od změny teploty (viz též [3]).

#### PŘÍKLAD

Jako ukázka účinků vyvolaných vysycháním povrchu betonových desek je uveden jednoduchý příklad časového vývoje rozložení napětí podél tloušťky desky průměrné podlahy z prostého betonu



Obr. 5 Průběh a časový vývoj průhybů deskového pásu

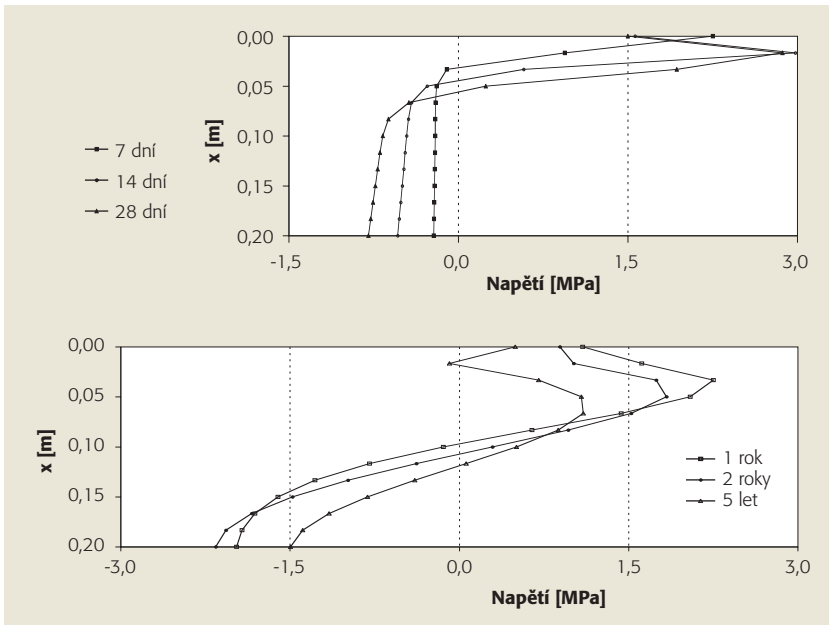
Fig. 5 Distribution and time development of deflection of the slab strip in lateral direction

(obr. 1). Jedná se o deskový pás šířky 1, délky 6 a tloušťky 0,2 m. Deska kromě vlastní tíhy, nenesení žádné další vnější zatížení a je uložena na prostředí, které nedovoluje únik vlhkosti. Horní povrch desky je naopak vystaven vysychání. Časový průběh změny vlhkosti na horním povrchu desky je vyznačen na obr. 2. Rozdělení desky na prvky a idealizace poddajného podkladu prostřednictvím pérových prvků je ukázáno na obr. 1.

Jedním z nejvýznamnějších faktorů při tahovém namáhání betonu je tahové změkčení (strain softening). Jemu odpovídající pracovní diagram použitý ve studii je vykreslen na obr. 3.

Z výsledků řešení jsou uvedeny průběhy vlhkosti napříč tloušťkou desky pro různá stáří betonu (obr. 4). Je zřejmé, že vysychání proniká dovnitř desky velmi pomalu a průběhy vlhkosti (které určují smršťování) jsou výrazně nelineární.

Vývoj průhybů a deformací průřezu deskového pásu ukazuje obr. 5. Postupné vysychání horního povrchu vyvolává snahu o příčné zakřivení desky a přeroz-



Obr. 7 Průběh napětí po tloušťce desky pro různá stáří betonu – prvek 6

Fig. 7 Stress variation along the thickness of the slab in different ages of concrete – element 6

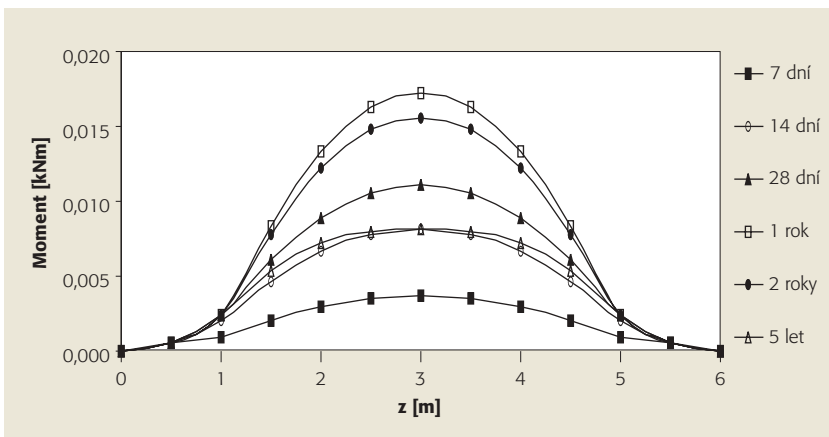
dělení reakcí podkladu. V krajních oblastech šířky dochází ke zvednutí okrajů a k vyloučení části podkladu z působení. Hlavním výsledkem studie je vývoj napětí v desce (jednotlivé křivky na obr. 6 a 7 ukazují průběhy napětí napříč tloušťkou desky v několika hodnotách stáří betonu). Tato napětí jsou závislá nejen na stáří betonu a na vzdálenosti uvažovaného bodu od povrchu, ale též na vzdálenosti od okraje desky. Na obr. 6 jsou pro-

to ukázána napětí po tloušťce prvku 3 (viz obr. 1), tj. při okraji desky, která je zde v pozdějších stádiích mimo kontakt s podložím na obr. 7 potom ve středu šířky desky (prvek 6, obr. 1). Je zřejmé velmi nelineární, časově proměnné rozložení napětí, s maximem dosaženým v nízkém stáří betonu. Je též patrný značný vliv tahového změkčení betonu při vzrůstajících deformacích vrstev při horním povrchu. Tato napětí vytvářejí ohybové momenty v desce, jejichž průběh v podélném směru ukazuje obr. 8. Na okrajích desky, které jsou v pozdějších stádiích mimo kontakt s podložím, vznikají ohybové momenty, na nichž se podílí též vlastní tíha desky. Na volných okrajích desky jsou tyto momenty samozřejmě nulové.

Tyto ohybové momenty však samy o sobě neříkají nic o napětích a je zřejmé, že kdybychom z nich běžným technickým výpočtem, založeným na elementárním předpokladu rovinnosti jejich rozložení,

Obr. 8 Průběh ohybových momentů v příčném směru

Fig. 8 Bending moments diagram in the lateral direction



vyšlili napětí, dostaneme výsledky diametrálně rozdílné od skutečných, ukázaných na obr. 6 a 7.

### ZÁVĚR

Studie ukázala metodiku analýzy namáhání a přetvoření deskových konstrukcí na poddajném podkladu, u nichž dominantním jevem jsou objemové změny betonu. Prokázalo se, že běžná technická řešení, která jsou založena na charakteristikách celých průřezů (moment setrvačnosti, průřezová plocha) a kde také projevy dotvarování a smršťování betonu jsou vztaženy, jako střední charakteristiky, k celému průřezu, jsou nepoužitelná. Je zřejmé, že napětí získaná takovýmto výpočtem, nerespektujícím skutečný nerovnoměrný proces vysychání, jsou zcela fiktivní.

*Uvedené výsledky byly získány v rámci řešení Výzkumného záměru MSM 210000001 a 103/02/0020 zpracovávaných Stavební fakultou ČVUT v Praze a grantového projektu č. 103/00/0604 uděleného Grantovou agenturou České republiky.*

### Literatura

- [1] Bažant Z. P., Křístek V., Vitek J. L.: Drying and Cracking Effects in Box – Girder Bridge Segment, Journal of SE, Vol. 118, No. 1, 1992
- [2] Pilhofer H. W., Křístek V.: Stress distribution in steel fibre reinforced slabs due to drying, Sborník konference CONCON 98, Praha, leden 1998
- [3] Vitek J. L., Křístek V., Kohoutková A.: Analýza betonových desek na poddajném podkladu vystavených vlivům vysychání a smršťování betonu, Stavební obzor, předáno k uveřejnění

Ing. Alena Kohoutková, CSc.  
tel.: 02 2435 3740, fax: 02 311 7362  
e-mail: akohout@fsv.cvut.cz  
Prof. Ing. Vladimír Křístek, DrSc.  
tel.: 02 2435 3875, fax: 02 311 7362  
e-mail: kristek@beton.fsv.cvut.cz  
oba: Katedra betonových konstrukcí a mostů  
Stavební fakulta ČVUT  
Thákurova 7, 166 29 Praha 6  
Doc. Ing. Jan L. Vitek, CSc.  
Metrostav, a. s.  
Koželuzská 5, 180 00 Praha 8  
tel: 0602 648 284  
e-mail: vitek@metrostav.cz