PRUŽNOPLASTICKÁ ANALÝZA PRUTŮ V NÁVAZNOSTI NA NORMU EC2

ELASTIC PLASTIC ANALYSIS OF BEAMS WITH RESPECT TO EC2 STANDARD

PETR FAJMAN

Tento příspěvek je zaměřen na návrh železobetonových rámů podle Eurocode 2 při kombinaci namáhání M_y a N při využití plasticity. Nelineární materiálové vztahy je možné do výpočtu zavést buď integrálním modelem průřezu, to je podmínkou plasticity ve tvaru interakčního diagramu M-N, nebo přímo z pracovních diagramů oceli a betonu. V článku je rozebrán rozdílný přístup normy EC2 k nelineárnímu výpočtu a k dimenzování.

This article is focused on the design of reinforced-concrete frames according to EC2. Combined bending moment and axial force action is solved for using plasticity theories. Are introduced by plasticity condition is formulated on cross-section level (integral model in terms of bending moment and axial force) or a material level (in terms of normal longitudial stress). The inconsistent approach in EC2 to nonlinear solutions is the issue.

Tento příspěvek je zaměřen na návrh železobetonových rámů podle Eurocode 2 [1] při kombinaci namáhání M_y a N při využití plasticity. Nelineární materiálové vztahy je možné do výpočtu zavést buď integrálním modelem průřezu, to je podmínkou plasticity ve tvaru interakčního diagramu M-N, nebo přímo z pracovních diagramů oceli a betonu podle deformace v daném místě průřezu. Největším problémem při pružnoplastickém výpočtu není metodika zavedení nelineárních vztahů, jak by se na první pohled jevilo, ale rozdílný přístup normy EC2 k nelineárnímu výpočtu účinků zatížení a k dimenzování [3], [4]. Jedná se především o hodnoty pevnosti betonu v tlaku f_c, kde se při pružnoplastickém výpočtu doporučuje počítat se středními hodnotami pevnosti betonu f_{cm}, a při dimenzování s výpočtovými hodnotami pevnosti betonu f_{cd}. O pevnostech oceli f_y se norma nezmiňuje. Stručně řečeno, při pružnoplastickém výpočtu se pracuje s průřezem nadimenzovaným podle výpočtových hodnot, ale vnitřní síly vznikají v závislosti na středních hodnotách. Tento rozpor by bylo možné zmírnit tím, že by se jako podmínka plasticity vzal interakční diagram M-N, kde se pracuje s výpočtovými hodnotami pevnosti.

V článku jsou sledovány dva cíle:

- Porovnání integrálního a vrstvičkového modelu průřezu. Z tohoto důvodu jsou v řešených příkladech v obou modelech uvažovány stejné materiálové vlastnosti oceli a betonu – pevnosti a ideálně pružnoplastické pracovní diagramy.
- Zjistit vliv různých pevností betonu na velikost mezního zatížení. V příkladech je počítáno mezní zatížení pro výpočtové a střední hodnoty pevnosti betonu. Pokud se výsledky odlišují, je zřejmé, že konstrukci nelze efektivně navrhnout s využitím plasticity.

Pokud bychom se drželi striktně normy, může nastat následující situace. Rám je nadimenzován podle výpočtových hodnot na pružný stav účinků zatížení. Poté se provede pružnoplastický výpočet se středními hodnotami. Mezní zatížení a tím vnitřní síly se výrazně zvětší. Nové nadimenzování na přerozdělené vnitřní síly nutně zvětší plochu výztuže a tím i kapacitu konstrukce. Provede se nový pružnoplastický výpočet a opět se zvětší mezní zatížení. Je vidět, že takový výpočet nemá konce.

VÝPOČETNÍ MODEL PRUTOVÉHO PRVKU

Návrh železobetonových rámů podle Eurocode 2 při kombinaci namáhání M_y a N neuvažuje vazbu mezi smykovým a normálovým napětím, což odpovídá dimenzování, kde se odděleně dimenzuje ohyb a smyk.

Při výpočtu účinku zatížení lze pro určení vnitřních sil na mezi únosnosti použít metody lineární pružnosti i metody založené na teorii plasticity. Pro výpočet konstrukce jako celku lze užít následujících zjednodušení:

- přetvoření od normálových a posouvajících sil mohou být zanedbána (jsou-li do 10 % přetvoření ohybových),
- přetvoření od dotvarování se neuvažuje, vzhledem k zkoumané problematice a rozsahu článku se neuvažuje dlouhodobé zatížení,
- poissonův součinitel $\nu = 0{,}2$,
- průřez se deformuje rovinně.

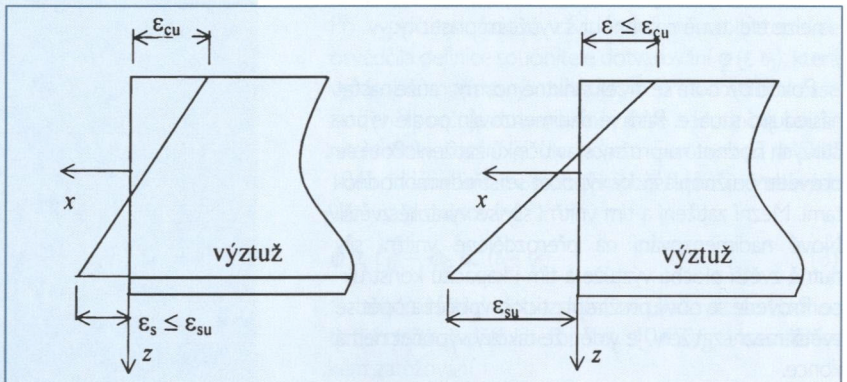
Všechny uvedené předpoklady jsou použity v této studii.

Matice pružnoplastické tuhosti elementu konstrukce se získá standardními postupy metody MKP popsanými např. v [2].

PRUŽNOPLASTICKÝ VÝPOČETNÍ MODEL PRŮŘEZU

Pro pružnoplastický výpočet použijeme přírůstkové formulace teorie plasticity. Ta nám umožní získat vnitřní síly i deformace v plastických kloubech na rozdíl od tuhoplastického výpočtu, kde je výsledkem pouze mezní zatížení a rozložení kloubů. Konstrukce je postupně přitěžována až do zadaného zatížení, nebo kolapsu konstrukce.

Kolaps konstrukce může nastat buď ztrátou tvarové určitosti, nebo překročením mezních deformací v plastických kloubech. Mezní křivost je dána buď maximálním stlačením betonu $\varepsilon_{cu} = -0{,}0035$, viz obr. 1a, nebo mezním přetvořením výztuže v tahu $\varepsilon_{su} = 0{,}02$, viz obr. 1b. Tato hodnota je u výztuže s vysokou tažností až 0,05, pro výpočet podle teorie plasticity se doporučuje snížit hodnotu na 0,02.



Obr. 1 Mezní deformace ve vyztuženém průřezu
Fig. 1 Limit strain states in reinforced cross-section

Tuhost průřezu a vnitřní síly mohou být získány pomocí vztahů teorie plasticity, kde podmínku plasticity a plastický potenciál nahradí interakční diagram únosnosti M-N, nebo numerickou integací vrstvičkovým modelem. Oba modely jsou v principu stejné a dávají prakticky stejné mezní zatížení, hlavní rozdíl je v dráze zatěžování a ve vypočtených deformacích konstrukce od daného zatížení.

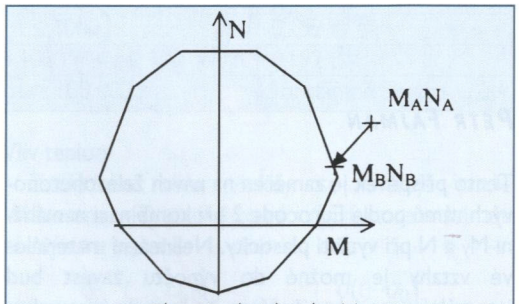
Při řešení konstrukce pomocí interakčního diagramu se průřez chová pružně až do dosažení podmínky plasticity, pak dochází podle EC2 k plastickému tečení. Vytváří se plastické klouby, zvětšují se deformace a vnitřní síly *M,N* se přerozdělují podle podmínky plasticity.

Při vrstvičkovém modelu dochází již od počátku přitěžování k porušování betonu v tažených vláknech. Z důvodu porovnání s integrálním modelem je hodnota pevnosti betonu v tahu malá. Průřez je pak v pružnoplastickém stavu prakticky celou dobu zatěžování.

Porušení může nastat dvěma způsoby. Maximálním stlačením (resp. protažením) betonu (resp. výztuže), danými normou EC2, nebo ztrátou tvarové určitosti konstrukce.

INTEGRÁLNÍ MODEL PRŮŘEZU (INTERAKČNÍ DIAGRAM)

K sestavení použijeme vztahů z EC2 viz [1] příloha 8. Při výpočtu interakčního diagramu se vychází z výpočtových hodnot pevností betonu a oceli. Interakční diagram je považován za podmínku plasticity s přidruženým zákonem plastického přetváření. Interakční diagram je pak současně i „plastickým potenciálem". Pokud se při výpočtu vnitřních sil dostaneme vně podmínky plasticity (bod A – M_A, N_A), musíme se na ni dostat zpět – v obr. 2 jde o bod B – M_B, N_B. Návrat zpět je možný různými způsoby, při výpočtu testovacích příkladů byl použit návrat dle podmínky normality. Při tomto výpočtu je průřez celý buď v pružném, nebo v plastickém stavu.



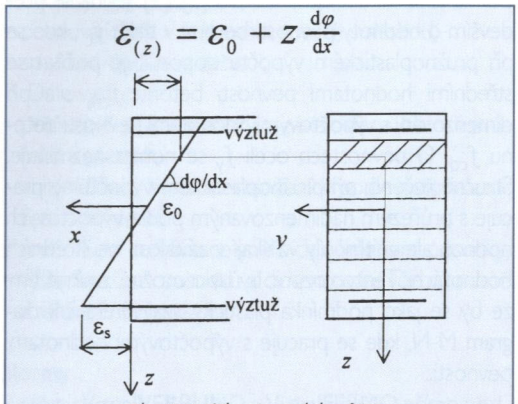
Obr. 2 Podmínka plasticity
Fig. 2 Plasticity condition in the integral model

VRSTVIČKOVÝ MODEL PRŮŘEZU

Při výpočtu vnitřních sil vycházíme přímo z integrální definice vnitřních sil

$$N = \int_A \sigma_x \, dA, \qquad M = \int_A \sigma_x z \, dA. \tag{1}$$

Integrál přez plochu je proveden numericky – součet součinů $\sigma_x A_p$ resp. $\sigma_x A_p z_p$ v jednotlivých proužcích (obr. 3). V závislosti na vzdálenosti *z* získáme $\varepsilon_{(z)}$ a z pracovního diagramu oceli nebo betonu získáme odpovídající napětí σ_x. Tento model vystihuje pružné, pružnoplastické i plastické chování průřezu.



Obr. 3 Vrvičkový model průřezu
Fig. 3 Layer model of the cross-section

Při výpočtu účinků zatížení jsou podle EC2 fyzikální vztahy pro beton dány čárkovanou křivkou v pracovním diagramu betonu (obr. 4). Za pevnost betonu f_c je dosazena střední hodnota pevnosti betonu f_{cm}.

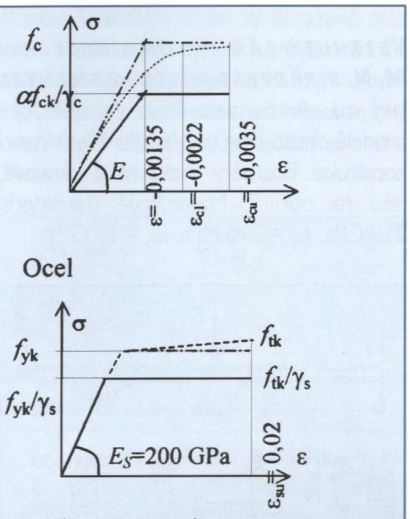
Odpovídající vztahy pro beton jsou:

- střední pevnost v tlaku $f_{cm} = f_{ck}+8$ (MPa), kde f_{ck} je charakteristická pevnost v tlaku,
- napětí (v grafu je znázorněno čárkovaně)

$$\sigma = f_{cm} \cdot \frac{k\eta-\eta^2}{1+(k-2)\eta}, \qquad (2)$$

kde $k = 1{,}1E_{cm}\frac{\varepsilon_{c1}}{f_{cm}}$, a $\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c1}}$

- součinitel spolehlivosti materiálu $\gamma_c = 1{,}5$,
- redukční součinitel v tlaku $\alpha = 1$,
- ε_{c1} je zobrazeno v grafu obr. 4.



Obr. 4 Pracovní diagram
Fig. 4 Stress-strain diagrams

Pro ocel se při výpočtu účinku zatížení pohybujeme v pracovním diagramu po čárkované křivce.

- součinitel spolehlivosti materiálu $\gamma_s = 1$ nebo 1,15.

Místo vztahu (2) je v řešených příkladech použit bilineární pracovní diagram betonu i oceli. V grafech na obr. 4 jsou znázorněny čerchovanou čarou. Tento předpoklad je v souladu s normou a zároveň nám umožní porovnat výpočty s různými modely průřezu.

Pro beton C20/25 vychází střední hodnota f_{cm}= 28 MPa, a výpočtová hodnota f_{cd} = 13,33 MPa.

PŘÍRŮSTKOVÁ METODA ŘEŠENÍ

Newton-Raphsonova (NR) nebo modifikovaná Newton-Raphsonova metoda (MNR) [2] rozdělí celkové zatížení R na přírůstky ΔR. V rámci jednoho přírůstku zatížení se matice tuhosti K linearizuje. Tím dochází k odchýlení od skutečné dráhy zatížení a vzniku tzv. nevyrovnaných sil G, viz obr. 5.

$G = R - F_{INT}$,

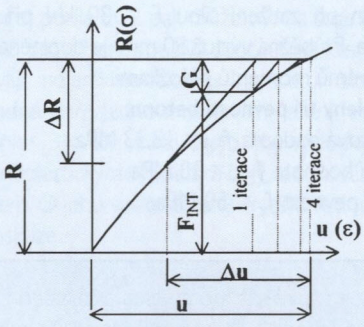
kde R je vektor zatížení

a F_{INT} je vektor koncových vnitřních sil, který získáme ze vztahu $F_{INT} = \int_l MBdl$,

kde B je geometrická matice nosníku (podrobnosti lze najít v [2]), a $M=\{N, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z\}$ je vektor vnitřních sil.

Těmito silami se konstrukce zatíží a výpočet se opakuje (iteruje) až je vektor G dostatečně malý. Nastavení kritéria konvergence závisí na řešené konstrukci. V příkladech je zvoleno $\|G\| < 0{,}01\|F\|$.

Poté se konstrukce opět přitíží o ΔR a výpočet se opakuje až do překročení mezní deformace, nebo ztráty tvarové určitosti.



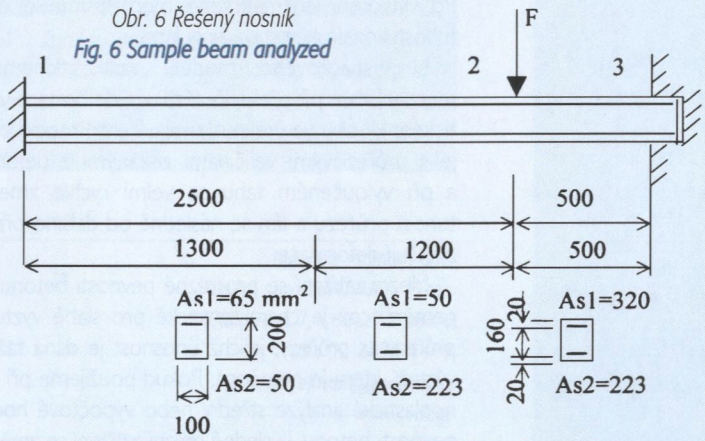
Obr. 5 MNR přírůstková medtoda
Fig. 5 Modified Newton-Raphton Interation in an incremental solution

SROVNÁNÍ INTEGRÁLNÍHO A VRSTVIČKOVÉHO MODELU NA PŘÍKLADECH

Vetknutý nosník – bez normálových sil

Střední a výpočtové hodnoty se výrazně liší u betonu, proto první příklad je zaměřen na chování konstrukce při měnící se pevnosti betonu. Jedná se o dvakrát staticky neurčitou konstrukci, rozměry, vyztužení, okrajové podmínky – viz obr. 6. Na pravé straně nosníku je zvoleno posuvné vetknutí, aby nevznikala normálová síla od posunu neutrální osy při zplastizavání průřezu. Může to být model železobetonového trámu, který je zakotven do stěn, které se mohou vůči sobě mikroskopicky posunovat. Materiálové charakteristiky: E_o = 210 GPa, f_o = 210 MPa, E_b= 29 GPa.

Obr. 6 Řešený nosník
Fig. 6 Sample beam analyzed

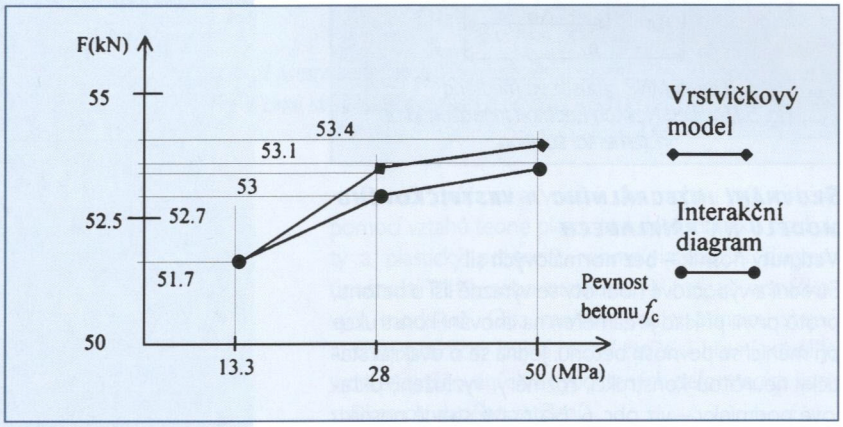


Pevnost betonu [MPa]	Typ výpočtu	Dosažená úroveň zatížení F [kN]	M_1 [kNm]	M_2 [kNm]	M_3 [kNm]
f_{cd} = 13,3	Interakční diagram	51,7	– 2,24	7,72	– 11,0
	Vrstvičkový model	51,7	– 2,35	7,67	– 11,03
f_{cm} = 28,0	Interakční diagram	52,7	– 2,24	7,98	– 11,08
	Vrstvičkový model	53,0	– 2,34	7,89	– 11,35
f_c = 50,0	Interakční diagram	53,1	– 2,25	8,08	– 11,12
	Vrstvičkový model	53,4	– 2,35	7,87	– 11,49

Vyztužení je navrženo na vnitřní síly získané pružným výpočtem při zatížení sílou F = 30 kN při f_{cd} = 13,3 MPa. Průběžná výztuž 50 mm² je doplněna v místech extrémů momentů příložkami.

Jsou zvoleny tři pevnosti betonu:

- výpočtová hodnota f_{cd} = 13,33 MPa,
- střední hodnota f_{cm} = 28 MPa,
- fiktivní pevnost f_c = 50 MPa.



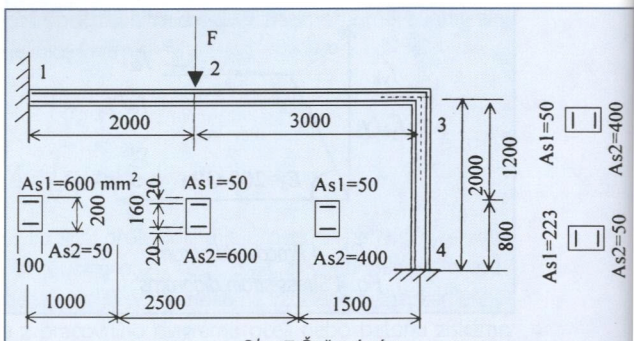
Z uvedených výsledků vyplývá, že integrální model s interakčním diagramem dává v tomto případě nižší hodnoty maximálního zatížení. Dosažená mez zatížení odpovídá zatížení při ztrátě statické určitosti. Kinematický mechanismus vznikne postupně takto: první kloub je v bodě 3, druhý v 1 a poslední pod silou. Po vytvoření kinematického mechanismu se matice tuhosti konstrukce stává singulární.

U vrstvičkového modelu vzniká kinematický mechanismus při překročení mezní deformace v plastickém kloubu ve vetknutí u síly. Tento model pracuje s průřezovými veličinami získanými z deformací, a při vyloučeném tahu se velmi rychle zmenšuje tuhost průřezu a tím se následně od dalšího přitížení zvětšují deformace.

Mezní zatížení se pro různé pevnosti betonu příliš nemění, což je charakteristické pro slabě vyztužené průřezy tj. průřezy, jejichž únosnost je dána taženou výztuží, která je neměnná. Pokud použijeme při pružnoplastické analýze střední nebo výpočtové hodnoty pevnosti betonu, výsledné mezní zatížení se změní jen o 2 %. Z grafu, ve kterém je vykreslena závislost velikosti mezního zatížení na pevnosti betonu, vyplývá nelineární vztah mezi těmito veličinami.

VETKNUTÝ RÁM – KOMBINACE M,N S PŘEVLÁDAJÍCÍM MOMENTEM

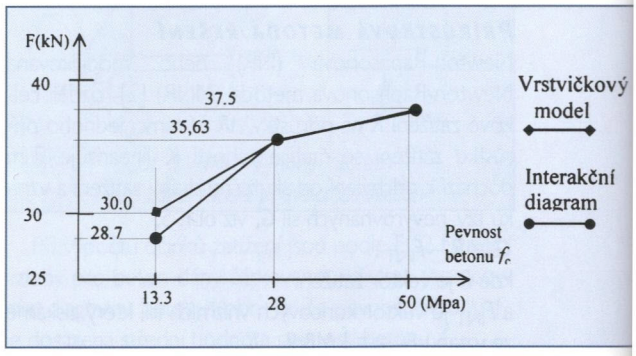
Jaký má vliv normálová síla na výsledky uvedených modelů otestujeme na příkladu třikrát staticky neurčité konstrukci. Rozměry, vyztužení a okrajové podmínky jsou na obr. 7. Materiálové charakteristiky E_o = 210 GPa, f_o = 210 MPa, E_b = 29 GPa.



Obr. 7 Řešený rám
Fig. 7 Sample plane frame analyzed

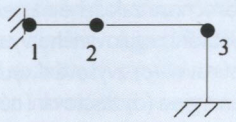
Vyztužení je navrženo na vnitřní síly získané pružným výpočtem při zatížení sílou F = 20 kN při f_{cd} = 13,3 MPa. Průběžná výztuž 50 mm² je doplněna v místech extrémů momentů příložkami. Pevnost betonu je brána stejně jako v předchozím příkladu.

Normálové síly působí vždy v celém prutu $N_1 = N_2$, $N_3 = N_4$.



Pevnost betonu [MPa]	Typ výpočtu	Dosažená úroveň zatížení F [kN]	M_1 [kNm]	N [kN]	M_2 [kNm]	M_3, [kNm]	N [kN]	M_4 [kNm]
f_{cd} = 13,3	Interakční d.	28,75	– 17,40	– 7,75	17,20	– 9,32	– 9,54	3,84
	Vrstvičkový m.	30,07	– 17,65	– 9,30	17,66	– 11,03	– 10,40	4,77
f_{cm} = 28,0	Interakční d.	35,63	– 20,66	– 12,11	20,66	– 14,07	– 12,60	6,52
	Vrstvičkový m.	35,63	– 20,78	– 11,70	20,83	– 13,53	– 12,40	6,37
f_c = 50,0	Interakční d.	37,50	– 21,85	– 12,50	21,80	– 14,50	– 13,10	6,76
	Vrstvičkový m.	37,50	– 21,70	– 12,40	22,10	– 14,10	– 13,10	6,95

Při nižší pevnosti betonu f_c = 13,3 MPa bylo v obou případech dosaženo mezního přetvoření v plastickém kloubu pod silou. U vyšších pevností dosažená mez zatížení odpovídá zatížení při ztrátě tvarové určitosti. Postupný vznik kinematického mechanismu je nakreslen v obr. 8. Je zřejmé, že se stává nestabilní pouze část konstrukce – příčle. Tento vývoj je shodný pro oba modely průřezu.



Obr. 8 Vznik plastických kloubů
Fig. 8 Development of plastic hinges

Maximální zatížení se pro různé pevnosti betonu změnilo podstatně více než v předešlém případě. Pokud použijeme při pružnoplastické analýze střední (zde 28 MPa) nebo výpočtové (zde 13,33 MPa) hodnoty pevnosti betonu, výsledné mezní zatížení se změní o 20 %. Z grafu opět vyplývá, že závislost zatížení na pevnosti betonu je silně nelineární.

ZÁVĚR

- Výsledky řešených příkladů ukázaly velmi dobrou shodu mezi vrstvičkovým a integrálním modelem průřezu. Lze tedy říci, že můžeme při hledání mezního zatížení použít interakční diagram M-N jako podmínku plasticity.

- Závislost velikosti mezního zatížení na pevnosti betonu je malá při působení samostatných ohybových momentů.

- Pokud v konstrukci resp. průřezu působí normálová síla a moment, výsledné mezní zatížení se výrazně liší při výpočtu s výpočtovými a středními hodnotami pevnosti betonu. Pružnoplastický výpočet účinků zatížení vede k již zmíněnému rozporu s posouzením průřezů podle normy EC2. Tento názor je prezentovaný i v literatuře [3] a [4] a zároveň ho potvrzují i řešené příklady. Pružnoplastický výpočet podle EC2 pak může být na straně nebezpečné, protože nepoužívá součinitele, které v sobě skrývají nejen modelovou nejistotu, ale i další náhodné vlivy. Jedno z možných řešení je ukázáno v článku [3] , kde je navrženo, aby výsledky získané pružnoplastickým výpočtem byly redukovány součinitelem. O jeho velikosti se však ještě vedou odborné diskuze.

Pružnoplastická analýza dokáže využít rezervy ve statickém působení konstrukce a jde až na samou hranici využití. Z tohoto důvodu by bylo vhodné sladit hodnoty materiálových charakteristik při výpočtu účinků zatížení podle teorie plasticity a při dimenzování dané konstrukce, neboť se vzájemně ovlivňují.

Výsledky uvedené v příspěvku byly získány za podpory grantu GA ČR 103/97/P107.

Literatura:

[1] EUROCODE 2 Výtah z ČSN P ENV 1992-1 s komentářem zpracovaným J. Procházkou. Vydal PROCON, Praha 1995.
[2] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky I, II. Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.
[3] König, G.: Safety and Performance Concepts: mission and activities, fib Commission 2, Structural Concrete, fib-news, 1999, No3, 14-17.
[4] Eibl, J.: Nonlinear design and appropriate safety format in IABSE – Colloqium Delft 1996 Basic of design and application to structures, 35, 159-164.

Ing. Petr Fajman, CSc.
Fakulta stavební ČVUT v Praze
Thákurova 7, 166 29 Praha 6
tel.: 02 2435 4499
e-mail: fajman@fsv.cvut.cz
www.cvut.cz