Prutové výpočtové modely

Strut and Tie Design Models

Evžen Horáček

Použití prutových výpočtových modelů (tvořených přímými tlačenými a taženými pruty) pro výpočet betonových konstrukcí. Obecné zásady pro stanovení tvaru modelu a pro dimenzování tlačených a tažených prutů. Příklady použití pro smykovou výztuž ohýbaných nosníků, krátké konzoly a kruhové desky vyztužené jen tangenciální výztuží. Porovnání prutového výpočtového modelu krátké konzoly s výsledky zkoušek. Příklad chybně vytvořeného modelu kruhové desky (tzv. W-systém), který měl za následek zřícení konstrukcí.

Use of strut and tie models for analysis of concrete structures. General provisions for determination of model and for design of struts and ties. Examples of use of models for shear reinforcement of beams, for short corbels and for circular slabs reinforced with ring bars only. Comparison of model of short corbel with results of tests. Example of incorrect model for circular slab (so-called W-system), which caused failures of flat slabs.

V dnešní době lze výpočtem metodou konečných prvků bez problémů získat podrobné rozdělení napětí i u složitých konstrukcí, zejména v lineárně pružném stadiu. Při využití tohoto výpočtu pro návrh betonových konstrukcí je však nutné se vyrovnat se špičkami napětí (které vznikají např. v rozích otvorů a v blízkosti působišť osamělých sil) a s umístěním výztuže, která nahradí tahová napětí v betonu. Dalším problémem je změna napjatosti konstrukce stanovená lineárním výpočtem po vzniku trhlin v betonu a po soustředění tahových napětí do výztuže. Nelineární výpočet těchto vlivů metodou konečných prvků je dosti pracný a nákladný.

Místo nelineárního výpočtu doporučují proto někteří odborníci výpočet s použitím *prutových výpočtových modelů*, které by měly uvedené vlivy vystihnout. Prutové modely, složené z přímých tlačených prutů (přenášejících tlakové síly v betonu) a z tažených prutů (které tvoří výztuž), jsou uvedeny jako alternativní metoda výpočtu v převzatých normách ČSN P ENV 1992-1-1 [1] a ČSN P ENV 1992-1-3 [2]. Podrobně jsou tyto modely popsány v literatuře německé [3], kde jsou označeny termínem *Stabwerke*, popř. *Fachwerke*, pokud tvoří příhrady. Prutové modely představují pro inženýra názorný obraz průběhu výslednic vnitřních sil v určité oblasti. Přitom se rozeznávají *oblasti B* (beam), ve kterých lze připustit předpoklad zachování rovinnosti příčného průřezu po přetvoření, a *oblasti D* (diskontinuita), kde je rozdělení přetvoření nelineární. Oblasti D vznikají i u tyčových prvků v místech geometrické diskontinuity (náhlá změna příčného průřezu, otvory) a v místech statické diskontinuity (v blízkosti působišť osamělých sil).

Základní předpoklady

Základní předpoklady výpočtu z *prutových výpočtových modelů* jsou uvedeny v normě [1], čl. 2.5.3.6.3, jejich aplikace na krátké konzoly v čl. 2.5.3.7.2, na stěnové nosníky v 2.5.3.7.3 a na oblasti namáhané soustředěnými břemeny v 2.5.3.7.4. V normě [2] jsou v čl. 2.5.3.8 příklady výpočtového modelu pro prvky se sníženou výškou průřezu v uložení. Prutový model je v odd. 4.3.2.2 normy [1] použit také pro návrh smykové výztuže ohýbaných prvků, kde se vychází z *příhradové analogie*, která se ve zjednodušeném tvaru používala od počátku rozvoje betonových konstrukcí po mnoho let pro navrhování třmínků a ohybů.

Metoda výpočtu s použitím prutových modelů je založena *na teorii plasticity*, předpokládá tedy dostatečnou *duktilitu (tažnost)* konstrukce. Početní průkaz této podmínky není podle zkušeností nutný, pokud je splněna podmínka uvedená v [1], čl. 2.5.3.6.3(3), kterou vzhledem k její důležitosti zde citujeme doslova:

„Aby byla přibližně zajištěna kompatibilita, má umístění a orientace tlačených a tažených prutů odpovídat rozdělení vnitřních sil vyplývajícímu z pružného výpočtu prvku".

Orientace prutového modelu na pružný výpočet má dále tu výhodu, že výpočet je vhodný i pro omezení šířky trhlin při provozním zatížení.

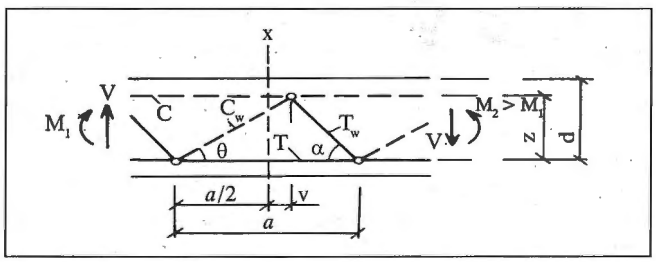
Tlačené a tažené pruty lze umístit do těžiště diagramu napětí (stanoveného např. metodou konečných prvků) ve vyšetřované oblasti. *Prutové modely* mohou být staticky určité či staticky neurčité (*mohou tedy tvořit příhradovinu*), mohu být však také *kinematicky neurčité* (čtyřúhelníková pole), popř. složené z obou těchto modelů ([1], čl. 2.5.3.7.3(2)). Tažené pruty jsou zpravidla reprezentovány výztuží, při malých silách (např. u desek) lze využít pevnosti betonu v tahu. V tlačených prutech lze obecně uvažovat rovnoměrně rozdělené napětí (využije se tedy *místní redistribuce napětí*), avšak zavádí se obvykle redukční součinitel pevnosti betonu v tlaku $\nu = 0{,}6$ (vzhledem k případnému působení tahu v kolmém směru k tlaku). Hodnota součinitele ve skutečnosti může být v místě příznivého působení (dvouosý tlak, příčná výztuž) i větší než 1.

Dále uvedeme některé podrobnější informace při použití prutových modelů pro výpočet smykové výztuže u ohýbaných prvků (oblast B), pro výpočet krátkých konzol (oblast D) a pro kruhové desky vyztužené jen tangenciální výztuží. Poslední případ uvedeme hlavně proto, abychom ukázali, jak model vytvořený při nerespektování shora uvedených zásad může vést ke zřícení konstrukcí.

V obrázcích jsou tažené pruty znázorněny plnou čarou a tahová síla označena značkou *T* a tlačené pruty jsou znázorněny přerušovanou čarou a tlaková síla označena *C*.

Smyková výztuž ohýbaných nosníků

Výpočet vycházející z příhradové analogie *s proměnným úhlem tlakových diagonál* je v [1], čl. 4.3.2.4.4. Tam uvedené výsledné vztahy byly získány úpravou následujících výchozích vztahů (při označení geometrických a silových veličin podle *obr. 1*):



Obr. 1 – Příhradový model ohýbaného nosníku / *Truss model of bending beam*

- Délka příhrady: $a = z\,(\mathrm{cotg}\,\theta + \mathrm{cotg}\,\alpha)$,
  kde rameno vnitřních sil z lze uvažovat hodnotou $z = 0{,}9\,d$,
- míra posunutí: $v = z\,(\mathrm{cotg}\,\theta - \mathrm{cotg}\,\alpha)\,/\,2$,
- omezení pro úhel α: $45° \leq \alpha \leq 90°$,
- omezení pro úhel θ : $0{,}4 < \mathrm{cotg}\,\theta < 2{,}5$
  pro nosníky s konstantní podélnou výztuží
- síla v taženém pásu: $T = M(x)\,/\,z + V\,v\,/\,z$,
  po dosazení poměru $v\,/\,z$ vyjde vztah (4.30) v [1],
- síla v tlakové diagonále: $C_w = V\,/\,\sin\theta$,
  plocha tlakové diagonály: $A_{wc} = b_w\,a\,\sin\theta$,
  kde b_w je nejmenší šířka betonového průřezu,
- napětí: $\sigma_{wc} = C_w\,/\,A_{wc} \leq \nu f_{cd}$,

  po dosazení vyjde pro $v = v_{Rd2}$ vztah (4.28) v [1],
- síla v tažené diagonále (výztuži): $T_w = V\,/\,\sin\alpha$.

Tahová síla t_w ve směru smykové výztuže na jednotku délky nosníku při vzdálenosti smykových vložek s musí vyhovět podmínce: $t_w = T_w\,/\,a \leq A_{sw}\,f_{ywd}\,/\,s$; dosazením vyjde pro $V = V_{Rd3}$ vztah (4.29) v [1].

Pro *svislé třmínky* se do shora uvedených vztahů dosadí $\alpha = 90°$.

U tzv. *standardní metody* (čl. 4.3.2.4.3 v [1]) se předpokládá pro tlakovou diagonálu úhel $\theta = 45°$ a při výpočtu únosnosti V_{Rd3} se podíl V_{wd} přenášený smykovou výztuží zvětšuje o podíl V_{cd} přenášený betonem podle vztahu (4.22) v [1].

Krátké konzoly přímo podporované

Podle dřívější normy ČSN 73 1201 (Projektování betonových staveb) se smyková výztuž krátkých konzol navrhovala stejně jako u nosníků, tj. z výslednice *hlavního tahu* konzoly délky a_c zatížené silou F_v (*obr. 2*): $T_w = F_v\,a_c\,/\,(z\sqrt{2})$, kde z je rameno vnitřních sil. Tato síla měla být přenesena šikmými vložkami (ohyby) a tomu byl přizpůsoben také doporučený způsob vyztužení, který byl v normě uveden. Protože docházelo k poruchám, bylo v pozdějším vydání citované normy uvedeno omezení: $a_c\,/\,z \geq 1$. Na druhé straně bylo zřejmé, že spotřeba výztuže je velká, a že ohyby nemají ve skutečnosti účinnost, která se jim při výpočtu přisuzovala. Proto byl v cizině i u nás proveden experimentální výzkum, který měl objasnit skutečné působení výztuže v krátkých konzolách.

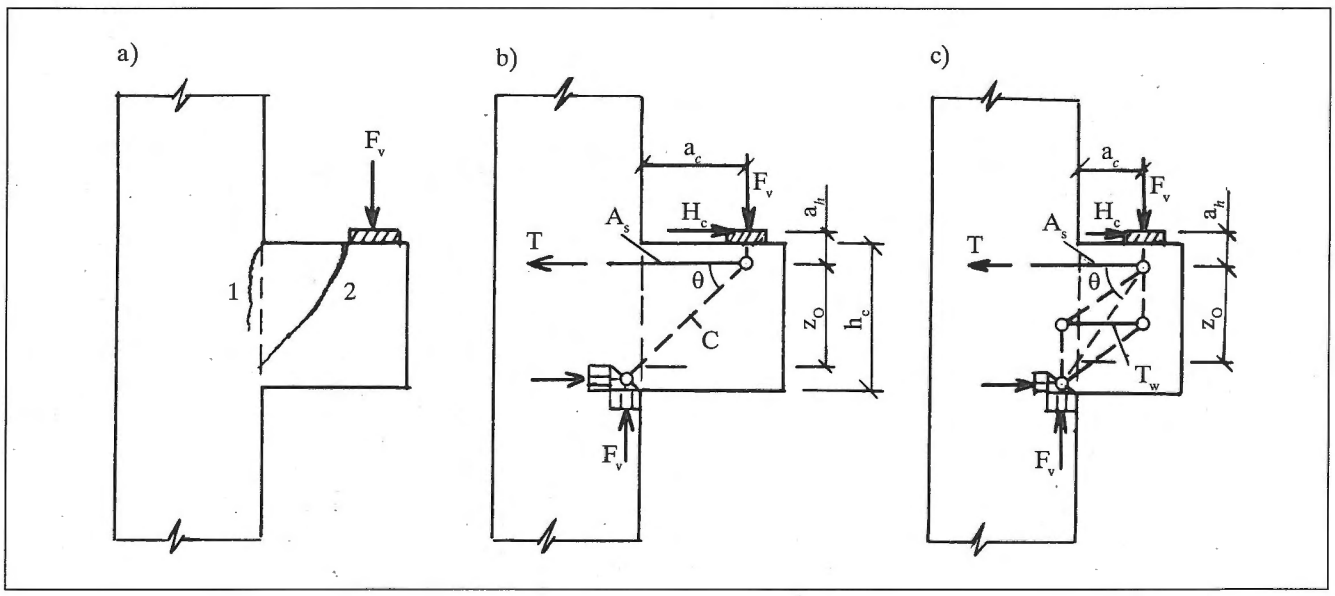
Uveďme zde nejdříve hlavní *poznatky z výzkumu*, které provedl autor tohoto příspěvku a které byly publikovány v lit. [4], protože tyto poznatky jsou plně v souladu s dnes doporučeným způsobem posuzování v normě [1]. Na 16 zkušebních tělesech se ověřovalo 11 způsobů vyztužení. Při postupném zvyšování zatížení vznikla jako první trhlina **1** (*obr. 2a*) v místě vetknutí, která většinou neprocházela přesně v líci sloupu, nýbrž uvnitř sloupu v místě svislé výztuže. Rozhodující však byla šikmá trhlina označená na *obr. 2a* číslem **2**, která vznikla náhle před porušením konzol, podél které se konzola při porušení rozdělila na dvě části. Způsob porušení byl vždy stejný bez ohledu na způsob vyztužení.

Pro *způsob vyztužení* vyplynuly tedy tyto poznatky:
- ohyby ve svislé rovině jsou málo účinné, protože za trhlinou **2** nemají dostatečné kotvení,
- velmi účinné jsou uzavřené třmínky, přičemž nejúčinnější jsou ty, které protínají trhlinu **2** přibližně kolmo,
- hlavní ohybová výztuž, přenášející sílu T (*obr. 2b*), je namáhána až k působišti síly F_v silou odpovídající ohybovému momentu v místě vetknutí, protože šikmá trhlina **2** směřuje k líci sloupu; tato výztuž musí být tedy plně zakotvena mezi roznášecí deskou a lícem konzoly.

Pro *výpočet* vyplynuly tyto závěry:
- výpočet z tzv. klasické teorie, tj. z hlavního tahu, nejen nevystihuje skutečnou únosnost konzoly, ale zcela zkresleně vyjadřuje i poměr dosažených únosností pro různé způsoby vyztužení,
- výpočet únosnosti vystihuje model táhla a vzpěry znázorněný na *obr. 9a* v [4], který byl definován velmi podobně jako v normě [1].

Poznatky získané popsanými zkouškami nebyly však u nás uplatněny ani v později vypracované normě ČSN 73 1201 z roku 1967, ale až v ČSN 73 1201 z roku 1986.

Základní prutový model podle normy [1] je pro $0{,}4\,h_c \leq a_c \leq h_c$ znázorněn na *obr. 2b*. Pro velmi krátkou konzolu při $a_c < 0{,}4\,h_c$ lze použít model podle *obr. 2c*, ze kterého lze stanovit vodorovnou tahovou sílu T_w pro dimenzování třmínků.



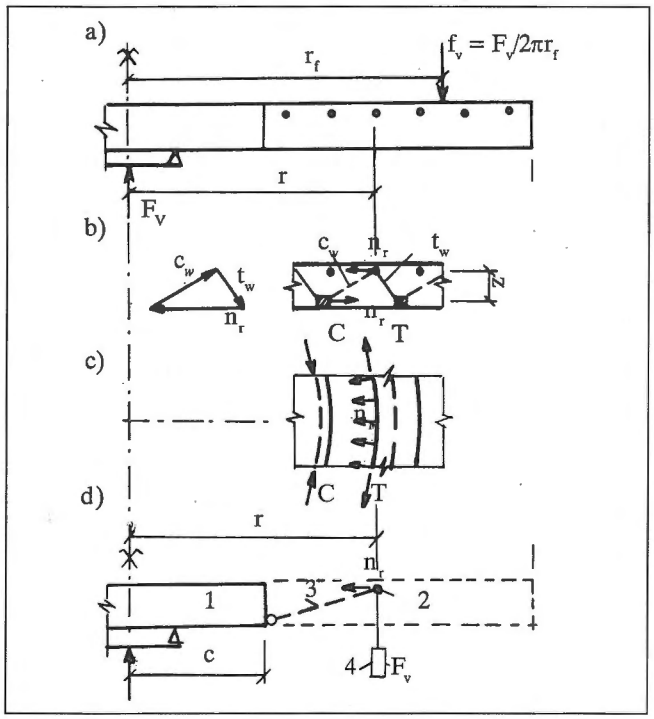
Obr. 2 – Krátká konzola a) charakteristické trhliny, b) prutový model při $0{,}4\,h_c \leq a_c \leq h_c$, c) prutový model při $a_c \leq 0{,}4\,h_c$ /
Short corbel a) *charakteristic cracs*, b) *strut and tie model for* $0{,}4\,h_c \leq a_c \leq h_c$, c) *strut and tie model for* $a_c \leq 0{,}4\,h_c$

Posouzení únosnosti konzoly při označení podle *obr. 2b* lze provést tímto postupem:

1. Únosnost V_d odpovídající posouzení tlakové betonové diagonály na sílu C_w lze stanovit jako sílu V_{Rd2} u ohýbaných nosníků. Tak lze určit celkovou výšku h_c konzoly (čl. 2.5.3.7.2(5) v [1]).
2. Výztuž o ploše A_s v taženém pásu, přenášející sílu rovnou hodnotě $T = F_v\, a_c / z_0 + H_c\, (a_H + z_0) / z_0$, musí být za styčníkem zakotvena pomocí smyček ve vodorovné rovině tvaru U, popř. pomocí speciálních kotvicích přípravků. Doporučuje se poměr a_c / z_0 uvažovat hodnotou $a_c / z_0 \geq 0{,}4$.
3. Uzavřené třmínky u konzoly délky $a_c \geq 0{,}4\, h_c$ mohou být vodorovné nebo šikmé o celkové ploše $A_w \geq 0{,}4\, A_s$ a u konzoly délky $a_c < 0{,}4\, h_c$ mají být vodorovné o ploše $A_w \geq 0{,}5\, A_s$ (mohou být posouzeny na sílu T_w stanovenou z modelu podle *obr. 2c*).
4. Je třeba posoudit přenesení tahové síly T do podporujícího prvku (zakotvení ve sloupu, posouzení průřezu sloupu bezprostředně nad konzolou a pod ní apod.).

Kruhová deska vyztužená jen tangenciální výztuží

Napjatost stropních desek, podporovaných sloupy se čtvercovou sítí, se v okolí vnitřních sloupů blíží napjatosti kruhové desky podepřené ve středu, protože radiální momenty v okolí sloupů u čtvercových deskových polí jsou rovny nule přibližně na kružnici o poloměru $a = 0{,}22\, l$, kde l je vzdálenost sloupů. Jde tedy přibližně o *rotačně symetrický* případ (*obr. 3a*). Taková deska může být vyztužena ve směru hlavních ohybových momentů, tedy ve směru tangenciálním a radiálním. Tangenciální momenty mají zde větší význam a za předpokladu určité redistribuce (popř. za předpokladu nulové ohybové tuhosti v radiálním směru) lze desku vyztužit pouze tangenciální výztuží.



Obr. 3 – Kruhová deska vyztužená jen tangenciální výztuží, a) řez, b) prutový model, c) radiální síly n_r, d) výpočtový model tzv. W-systému (**1** – předpjatá hlavice, **2** – tangenciální výztuž, **3** – vzpěra, **4** – závaží) / *Circular plate reinforced with ring bars*, a) *vertical section*, b) *strut and tie model*, c) *local radial forces*, d) *design model of so-called W-system* (**1** – *prestressed headplate*, **2** – *ring bar*, **3** – *strut*, **4** – *weight*)

Prutový výpočtový model pro znázornění účinku tangenciální výztuže je patrný z *obr. 3b* a *3c*. Tangenciální výztuž představuje *tažené prstence* o poloměru křivosti r, v nichž působí síla T, která vyvodí na jednotku délky vložky radiální normálovou sílu $n_r = T / r$ (*obr. 3c*). Tato síla se podle modelu znázorněného na *obr. 3b* přenáší tlakovými a tahovými diagonálami do dolních *tlačených betonových prstenců* (obdobně jako u nosníku) a vyvodí v radiální rovině ohybový moment $m_r = n_r z$, kde z je ramenno vnitřních sil. V lit. [5] bylo ukázáno, že tento moment se rovná radiální složce tangenciálního momentu, se kterou se v řešení kruhové desky podle teorie pružnosti počítá.

Autor tzv. *W-systému* však předpokládal pro uvedený případ jiný model (*obr. 3d*), a to speciálně pro kombinaci prefabrikované předpjaté hlavice s monolitickou deskou. Snímek vyrobeného modelu podle tohoto schematu je uveden v příspěvku [6] *na obr. 8*. Autor W- systému zcela *zanedbal tlačené betonové prstence a předpokládal, že radiální síly n_r, vyvozené zakřivenou výztuží, působí prostřednictvím betonových vzpěr jako normálové síly* do středu desky a vyvozují po obvodu hlavice tlakové namáhání. Předpokládal přitom, že tlakové síly od jednotlivých zakřivených vložek se sečítají, a tedy že pouhé tření zajistí i u hladkého styku jeho únosnost, takže nemůže dojít k porušení styku. Tuto vlastnost označil jako *samosvornost*. Z toho vyplývalo, že při zatěžovacích zkouškách podle *obr. 3a* by se při zvětšování vzdálenosti r_f (*obr. 3a*) musela normálová síla, a tedy únosnost styku ve smyku, zvětšovat.

Zkoušky [7] prokázaly, že pravý opak byl pravdou; u kruhové desky o průměru 2,5 m se dosáhlo při vzdálenosti liniového zatížení $r_f = 1{,}45$ m únosnosti F_v zhruba 1190 kN a při vzdálenosti $r_f = 2{,}44$ m únosnosti jen $F_v = 456$ kN. Tomu odpovídalo i chování desek, vyztužených podle W-systému, na stavbách. Při průměru hlavice 1,25 m se dosáhlo u stropních desek s rozpětím polí kolem 6 m dostatečné únosnosti, avšak při větších rozpětích (kdy vzniká ve styku větší záporný ohybový moment) *vznikaly významné poruchy a ve dvou případech i zřícení stropů*.

Příčinou významných poruch tedy byl zcela chybný výpočtový model (*obr. 3d*). Autor nevycházel z pružného výpočtu a nedodržel tedy důležitou podmínku, která je nutná pro zajištění kompatibility, uvedenou v úvodu tohoto příspěvku. Při zatížení se rozvíral u horního povrchu desky styk mezi hlavicí a monolitickou deskou a docházelo k vytržení zakřivené výztuže uložené v blízkosti styku. K porušení styku docházelo tím dříve, čím byl záporný radiální moment ve styku (podle pružného výpočtu) větší, tedy čím bylo rozpětí polí větší. U W-systému nebyl tento radiální moment zachycen výztuží, která ve styku chyběla.

Literatura

[1] **ČSN P ENV 1992-1-1** *Navrhování betonových konstrukcí. Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*

[2] **ČSN P ENV 1992-1-3** *Navrhování betonových konstrukcí. Část 1-3: Obecná pravidla - Betonové dílce a montované konstrukce*

[3] **Schlaich, J., Schäfer, K.:** Konstruieren im Stahlbetonbau. In: *Beton-Kalender* 1989, Teil II, s. 563.

[4] **Horáček, E.:** Únosnost železobetonových konzol. *Inženýrské stavby*, roč. 10, 1962, č. 5, s. 182-187.

[5] **Horáček, E.:** Dimenzování výztuže a působení zakřivené výztuže v deskách. *Pozemní stavby*, roč. 37, 1989, č. 2, s. 69-72.

[6] **Wünsch, J.:** Zpětná vazba mezi betonem a jeho zakřivenou výztuží. *Inženýrské stavby*, roč. 31, 1983, č. 7, s. 352-359.

[7] **Horáček, E.:** Experimentální ověření kruhové desky vyztužené jen tangenciální výztuží. *Stavebnícky časopis*, roč. 38, 1990, č. 1, s. 49–70.

Ing. Evžen Horáček, DrSc., U třetí baterie 15, 162 00 Praha 6